

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

А. В. Козырев

---

---

# МЕХАНИКА

---

---

Учебное пособие

Томск  
«Эль Контент»  
2012

УДК 531(075.8)  
ББК 22.2я73  
К593

Рецензенты:

**Крайнов А. Ю.**, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры математической физики  
Томского государственного университета;

**Сметанин С. В.**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики  
и информатики ТУСУРа.

**Козырев А. В.**

К593      Механика : учебное пособие / А. В. Козырев. — Томск: Эль Контент,  
2012. — 136 с.

ISBN 978-5-4332-0028-9

Данное пособие содержит 13 глав по основным разделам механики, предусмотренным базовым стандартом физического образования для студентов технических специальностей ВУЗов.

На оригинальном методическом уровне в пособии изложены основы метода координат и векторного понятийного аппарата механики, основы кинематики и динамики поступательного и вращательного движения твердого тела, законы сохранения энергии и импульса механических систем; механика жидкости и упругого твердого вещества, классическая теория гравитации и движения небесных тел, основные свойства гармонических колебаний, физические основы специальной теории относительности.

Данное пособие по физике изложено максимально кратким, но достаточно информативным языком. В целом, данное пособие представляется полезным не только для студентов первых курсов, но и для всех выпускников технических вузов. Новые подходы в изложении некоторых разделов найдут также преподаватели физики.

УДК 531(075.8)  
ББК 22.2я73

ISBN 978-5-4332-0028-9

© Козырев А. В., 2012  
© Оформление.  
ООО «Эль Контент», 2012

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение</b>                                               | <b>6</b>  |
| <b>1 Метод координат. Векторы</b>                             | <b>9</b>  |
| 1.1 Определения первичных физических терминов . . . . .       | 9         |
| 1.2 Система координат . . . . .                               | 10        |
| 1.3 Скорость и ускорение . . . . .                            | 11        |
| 1.4 Изменение координаты как интеграл от скорости . . . . .   | 12        |
| 1.5 Обобщение на случай трехмерного движения . . . . .        | 13        |
| 1.6 Векторы . . . . .                                         | 14        |
| 1.7 Векторная алгебра . . . . .                               | 16        |
| <b>2 Кинематика материальной точки</b>                        | <b>19</b> |
| 2.1 Скорость и ускорение при криволинейном движении . . . . . | 19        |
| 2.2 Векторное произведение . . . . .                          | 21        |
| 2.3 Кинематика вращательного движения . . . . .               | 24        |
| 2.4 Движение тела, брошенного под углом к горизонту . . . . . | 26        |
| <b>3 Законы движения</b>                                      | <b>29</b> |
| 3.1 Понятие силы . . . . .                                    | 29        |
| 3.2 Второй закон Ньютона. Масса . . . . .                     | 30        |
| 3.3 Третий закон Ньютона . . . . .                            | 31        |
| 3.4 Инерциальные системы отсчета . . . . .                    | 33        |
| 3.5 Неинерциальные системы отсчета . . . . .                  | 34        |
| 3.6 Принцип относительности Галилея . . . . .                 | 35        |
| 3.7 Примеры различных сил . . . . .                           | 36        |
| <b>4 Импульс и энергия</b>                                    | <b>40</b> |
| 4.1 Центр инерции (центр масс) протяженного тела . . . . .    | 40        |
| 4.2 Определение положения центра масс у простых тел . . . . . | 42        |
| 4.3 Импульс тела . . . . .                                    | 43        |
| 4.4 Механическая работа и кинетическая энергия . . . . .      | 44        |
| 4.5 Консервативные силы . . . . .                             | 46        |
| 4.6 Потенциальная энергия. Градиент . . . . .                 | 47        |
| 4.7 Закон сохранения механической энергии . . . . .           | 49        |
| <b>5 Столкновение двух частиц</b>                             | <b>51</b> |
| 5.1 Внутренняя энергия механической системы . . . . .         | 51        |
| 5.2 Классификация парных столкновений . . . . .               | 52        |

|           |                                                                 |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3       | Абсолютно упругий центральный (лобовой) удар . . . . .          | 53         |
| 5.4       | Абсолютно неупругий удар . . . . .                              | 54         |
| 5.5       | Столкновение в $C$ -системе . . . . .                           | 55         |
| 5.6       | Абсолютно упругий нецентральный удар . . . . .                  | 55         |
| <b>6</b>  | <b>Механика жидкости</b>                                        | <b>58</b>  |
| 6.1       | Закон Паскаля . . . . .                                         | 58         |
| 6.2       | Гидростатическое давление. Сила Архимеда . . . . .              | 59         |
| 6.3       | Стационарное течение идеальной жидкости . . . . .               | 60         |
| 6.4       | Примеры использования уравнения Бернулли . . . . .              | 62         |
| 6.5       | Вязкое трение . . . . .                                         | 64         |
| 6.6       | Течение вязкой жидкости по трубе . . . . .                      | 65         |
| 6.7       | Турбулентное течение. Число Рейнольдса . . . . .                | 66         |
| 6.8       | Силы сопротивления при движении тел в вязкой жидкости . . . . . | 67         |
| <b>7</b>  | <b>Упругие свойства твердых тел</b>                             | <b>69</b>  |
| 7.1       | Напряжение и деформация . . . . .                               | 69         |
| 7.2       | Закон Гука. Модуль Юнга и отношение Пуассона . . . . .          | 71         |
| 7.3       | Энергия упругой деформации среды . . . . .                      | 72         |
| 7.4       | Всестороннее сжатие . . . . .                                   | 72         |
| 7.5       | Деформация сжатия закрепленного стержня . . . . .               | 73         |
| 7.6       | Термическая деформация твердых тел . . . . .                    | 74         |
| 7.7       | Деформация сдвига . . . . .                                     | 75         |
| <b>8</b>  | <b>Динамика твердого тела</b>                                   | <b>78</b>  |
| 8.1       | Момент инерции твердого тела . . . . .                          | 78         |
| 8.2       | Моменты инерции некоторых простых тел . . . . .                 | 79         |
| 8.3       | Момент силы . . . . .                                           | 81         |
| 8.4       | Момент импульса . . . . .                                       | 82         |
| 8.5       | Динамика вращательного движения . . . . .                       | 83         |
| 8.6       | Скатывание круглого тела с наклонной плоскости . . . . .        | 84         |
| <b>9</b>  | <b>Трехмерное вращение твердых тел</b>                          | <b>87</b>  |
| 9.1       | Тензор момента инерции твердого тела . . . . .                  | 87         |
| 9.2       | Энергия и момент импульса несимметричного тела . . . . .        | 89         |
| 9.3       | Гироскоп . . . . .                                              | 89         |
| 9.4       | Центробежные силы и силы Кориолиса . . . . .                    | 91         |
| <b>10</b> | <b>Сила всемирного тяготения</b>                                | <b>94</b>  |
| 10.1      | Закон всемирного тяготения Ньютона . . . . .                    | 94         |
| 10.2      | Гравитация вблизи протяженных тел . . . . .                     | 96         |
| 10.3      | Приливные силы . . . . .                                        | 98         |
| 10.4      | Задача Кеплера . . . . .                                        | 99         |
| 10.5      | Параметры эллиптических орбит . . . . .                         | 101        |
| 10.6      | Алгоритм расчета траектории небесного тела . . . . .            | 103        |
| <b>11</b> | <b>Гармонические колебания</b>                                  | <b>104</b> |
| 11.1      | Малые колебания . . . . .                                       | 104        |

|           |                                                             |            |
|-----------|-------------------------------------------------------------|------------|
| 11.2      | Энергия колебательного движения . . . . .                   | 106        |
| 11.3      | Сложение одномерных колебаний. Биения . . . . .             | 106        |
| 11.4      | Сложение взаимно перпендикулярных колебаний . . . . .       | 107        |
| 11.5      | Колебания связанных маятников . . . . .                     | 108        |
| <b>12</b> | <b>Принцип относительности</b>                              | <b>112</b> |
| 12.1      | Скорость света и постулат Эйнштейна . . . . .               | 112        |
| 12.2      | Преобразования Лоренца . . . . .                            | 114        |
| 12.3      | Следствия преобразований Лоренца . . . . .                  | 116        |
| 12.3.1    | Относительность одновременности . . . . .                   | 116        |
| 12.3.2    | Относительность длин отрезков . . . . .                     | 117        |
| 12.3.3    | Относительность промежутков времени между событиями . .     | 118        |
| 12.4      | Сложение скоростей . . . . .                                | 119        |
| 12.5      | Аберрация света . . . . .                                   | 120        |
| <b>13</b> | <b>Релятивистская динамика</b>                              | <b>122</b> |
| 13.1      | Релятивистский импульс . . . . .                            | 122        |
| 13.2      | Энергия релятивистских частиц . . . . .                     | 123        |
| 13.3      | Закон сохранения полной энергии . . . . .                   | 124        |
| 13.4      | Неупругое столкновение двух релятивистских частиц . . . . . | 126        |
| 13.5      | Четырехмерное пространство-время . . . . .                  | 127        |
| 13.6      | Скалярное произведение 4-векторов . . . . .                 | 129        |
| 13.7      | Оптический эффект Доплера . . . . .                         | 131        |
|           | <b>Заключение</b>                                           | <b>134</b> |
|           | <b>Литература</b>                                           | <b>135</b> |

---

# ВВЕДЕНИЕ

---

Данное пособие содержит 13 глав по основным разделам механики, предусмотренным базовым стандартом физического образования для студентов технических специальностей ВУЗов.

На оригинальном методическом уровне в пособии изложены основы метода координат и векторного понятийного аппарата механики, основы кинематики и динамики поступательного и вращательного движения твердого тела, законы сохранения энергии и импульса механических систем, механика жидкости и упругого твердого вещества, классическая теория гравитации и движения небесных тел, основные свойства гармонических колебаний, физические основы специальной теории относительности.

Содержание глав представляет собой связное и последовательное изложение материала, в котором специально выделены наиболее важные элементы: определения новых терминов, утверждения, имеющие силу теорем, факты или положения, требующие особого внимания от читателя. В конце каждой главы приведен перечень контрольных вопросов, на которые читатель должен уметь ответить в ходе коллоквиума или беседы с преподавателем.

Все векторные величины в формулах и тексте обозначены полужирным шрифтом, например вектор скорости  $\mathbf{v}$ . Скалярное произведение векторов обозначается точкой между векторами-сомножителями —  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ , а векторное произведение крестиком —  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Скобки в математических формулах используются только для стандартной группировки математических операций и обозначения аргументов функций.

Данное пособие по физике изложено максимально кратким, но достаточно информативным языком. В целом, данное пособие представляется полезным не только для студентов первых курсов, но и для всех выпускников технических вузов. Новые подходы в изложении некоторых разделов найдут также преподаватели физики.

## Соглашения, принятые в книге

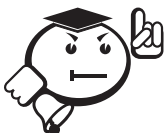
Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



.....  
*Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.*  
.....



.....  
Эта пиктограмма означает внимание. Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.  
.....



.....  
В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.  
.....



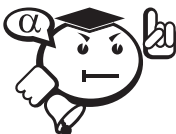
.....  
Эта пиктограмма означает совет. В данном блоке можно указать более простые или иные способы выполнения определенной задачи. Совет может касаться практического применения только что изученного или содержать указания на то, как немного повысить эффективность и значительно упростить выполнение некоторых задач.  
.....



.....  
Эта пиктограмма означает теорему. Данный блок состоит из *Названия теоремы* (Слова Теорема и Номера теоремы) и Текста теоремы.  
.....



.....  
Эта пиктограмма означает лемму. Данный блок состоит из *Названия леммы* (Слова Лемма и Номера леммы) и Текста леммы.  
.....



.....  
Эта пиктограмма означает аксиому. Данный блок состоит из *Названия аксиомы* (Слова Аксиома и Номера аксиомы) и Текста аксиомы.  
.....



..... **Пример** .....

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.  
.....

.....



Доказательство .....

Эта пиктограмма означает доказательство. Здесь автор подводит доказательство теорем, лемм и других утверждений.

.....



.....

Контрольные вопросы по главе .....



---

# Глава 1

## МЕТОД КООРДИНАТ. ВЕКТОРЫ

---

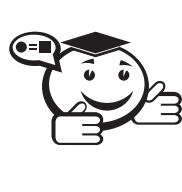
### 1.1 Определения первичных физических терминов



.....

***Измерением** физической величины будем называть процедуру сравнения данной величины с эталоном, который обычно принимают за единицу измерения.*

.....

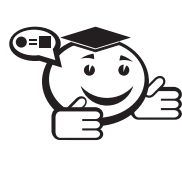


.....

*Назовем **материальной точкой** тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел или масштабами рассматриваемой физической системы*

.....

Это понятие применяется всегда, когда нас не интересуют размеры тела. Любое физическое тело можно представить как совокупность материальных точек.



.....

***Движением** материальной точки будем называть любое изменение во времени ее положения относительно других материальных точек.*

.....

Для измерения *времени* нужно иметь часы. Роль часов может выполнять любое устройство, совершающее периодическое движение. В этом случае длительность периода может служить единицей измерения времени.



.....  
*Совокупность неподвижных друг относительно друга материальных тел (опорные тела), по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающие время часы называются **системой отсчета**.*  
.....

## 1.2 Система координат

Для количественного описания движения с опорными телами связывают какую-либо *систему координат*.



.....  
**Система координат** обязательно содержит:  
.....  
а) *начало отсчета (нулевая точка);*  
б) *оси координат с пространственными масштабами;*  
в) *способ взаимно однозначного отображения положения точки на оси координат.*  
.....

В механике часто используется *декартова система координат* (рис. 1.1), в которой оси взаимно перпендикулярны, а отображение точки на координатные оси производится построением перпендикуляров из точки на данную ось.

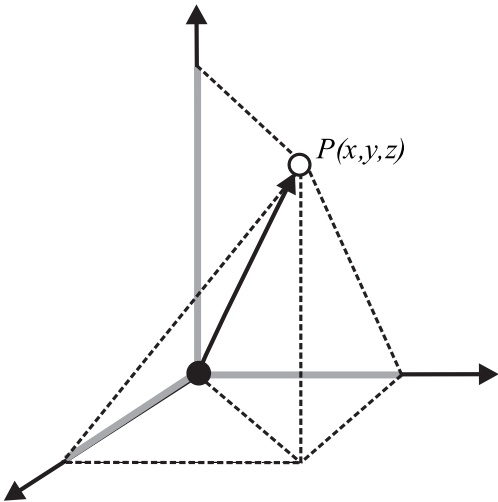


Рис. 1.1 – Декартова система координат

Тогда координатами точки  $x, y, z$  являются расстояния от соответствующих проекций точки на ось до начала отсчета. Эти три числа, которые удобно представлять как соответствующие проекции на оси координат некоторого выходящего из начала координат в данную точку *радиус-вектора  $\mathbf{r}$* , однозначно задают положение точки в пространстве в конкретный момент времени.



.....  
*При своем движении материальная точка проходит ряд последовательных положений, которые образуют в пространстве линию, называемую **траекторией движения**.*  
.....

Аналитически траектория описывается заданием трех функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , которые дают значения трех координат материальной точки в момент времени  $t$ .

### 1.3 Скорость и ускорение

Хотя мы интуитивно представляем, что такое «скорость», однако вопрос не так прост, когда необходимо дать точное определение. Мы подойдем к понятию скорости с понимания физической эквивалентности следующих величин: 90 км/час эквивалентно 25 м/с или эквивалентно 25 мм/мс и т. д.



.....  
*Мы определяем **скорость** точки как предел отношения расстояния  $\Delta x$ , пройденного точкой, к интервалу времени  $\Delta t$ , за которое осуществляется это прохождение, при стремлении  $\Delta t$  к нулю:*

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{1.1}$$

*Скорость одномерного движения равна производной координаты точки по времени.*  
.....

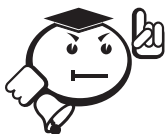
Введем теперь понятие *ускорения*, характеризующее изменение скорости во времени.



.....  
*По аналогии со скоростью изменения координаты  $v$  «скорость изменения скорости»  $a$  рассчитывается как производная скорости  $v$  по времени:*

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{1.2}$$

.....  
Если нам известна зависимость координаты тела от времени, то мы всегда можем рассчитать величину скорости и ускорения тела в любой момент времени!



.....  
Для определения скорости и ускорения в данный момент нам достаточно знать закон изменения координаты только в небольшой окрестности этого момента. Иногда это свойство величины отражают в его названии и говорят, что данная характеристика (или величина) является дифференциальной характеристикой. Скорость и ускорение — это дифференциальные характеристики движения.  
.....

## 1.4 Изменение координаты как интеграл от скорости

Пусть нам дана зависимость скорости тела от времени  $v(t)$ . Для расчета пройденной точкой координаты будем выражать приращение координаты через бесконечно малые части. Так, в первый момент скорость равна  $v_1$ , тогда координата, пройденная за малое время  $\Delta t$ , равна  $\Delta x_1 = v_1 \cdot \Delta t$ . В следующий момент скорость  $v_2$  будет уже другой, и добавка к пройденному расстоянию станет равной  $\Delta x_2 = v_2 \cdot \Delta t$  и т. д. Итоговое изменение координаты является суммой элементарных приращений  $\Delta x$ .

Расстояние, полученное таким методом, не будет точным, поскольку скорость за время  $\Delta t$  все же немного меняется. Выход из этого положения состоит в том, чтобы брать все меньшие интервалы  $\Delta t$ , то есть разбивать интервал времени движения на все большее число все меньших отрезков. Таким способом получаем точное выражение для перемещения частицы в виде определенного интеграла:

$$x(t) - x_1(t_1) = \int_{t_1}^t v(t) dt. \quad (1.3)$$

Операция интегрирования противоположна операции дифференцирования в том смысле, что производная этого интеграла  $x(t)$  равна мгновенной скорости  $v(t)$ .

Удобным способом описания движения является графический метод (рис. 1.2). Если имеется график скорости точки от времени, то интеграл (1.3) от скорости представляет собой площадь под заданной кривой.

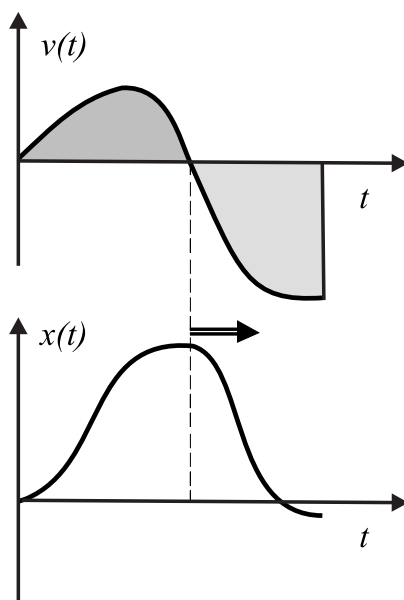


Рис. 1.2 – Соответствие между графиками скорости и координаты точки

Следует заметить, что при интегрировании площадь под кривой скорости принимает отрицательный знак, если скорость становится отрицательной. В этом случае координата точки автоматически начинает уменьшаться: скорость движения меняет знак, что естественно приводит к уменьшению текущей координаты.

## 1.5 Обобщение на случай трехмерного движения

До сих пор мы говорили о скорости и ускорении одномерного движения. Но эти понятия легко обобщить на трехмерный случай.

Вводя понятие системы координат, любое движение можно описать заданием трех функций времени  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , которые характеризуют изменение соответствующих координат во времени. Поэтому можно ввести соответствующие скорости изменения координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

(1.4)

Зная три компоненты скорости, легко определить полную скорость (модуль вектора скорости) точки  $\nu$  как скорость изменения длины траектории  $s$ :

$$\begin{aligned} \nu &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \end{aligned}$$

(1.5)

Подобно тому, как мы ранее ввели условное обозначение совокупности координат  $\mathbf{r}$ , можно ввести условное обозначение для трех компонент скорости  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

(1.6)

Это — просто краткая запись трех уравнений (1.4), которая называется *векторной формой уравнения*.



.....

Если движение рассматривается на протяжении конечного интервала времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , то вместо мгновенной скорости  $\mathbf{v}$  используют понятие **средней скорости** движения  $\bar{\mathbf{v}}$  за этот интервал времени:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

В этом случае вектор  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$  называется *вектором перемещения*.

.....

Аналогично можно ввести векторное определение трехмерного ускорения как совокупности трех вторых производных радиус-вектора по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

(1.7)

Введенные величины  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$ , каждая из которых представляет совокупность трех чисел, кратко называются вектором скорости и ускорения соответственно.

## 1.6 Векторы

Посмотрим более внимательно на те величины, которые мы назвали векторами.

*Вектор* — это понятие, введенное для описания движения точки безотносительно к выбору конкретной системы координат. Координатную систему мы можем вводить произвольно, но соотношения между физическими величинами (скорости, ускорения) не должны от этого зависеть. Дадим развернутое определение вектора.

В физике есть так называемые *скалярные величины*, которые представляют просто числа, не зависящие от системы координат. Например, число дробинok в патроне, молекул в закрытом сосуде и т. п. Но есть и другие величины, которые кроме величины, имеют такую характеристику, как направление: скорость, сила, импульс, ускорение и т. п.



.....  
*Векторная величина определяется тремя числами.*  
.....



.....  
*Символ  $\mathbf{r}$  — **радиус-вектор** означает совокупность трех координат  $x, y, z$ .*  
.....

Но при переходе к другой системе координат эти три числа будут, вообще говоря, другими  $x', y', z'$ . Как же связаны между собой  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ ? Рассмотрим для простоты двумерный случай.

Все относительно просто, если новая система отсчета (так называемая «штрихованная система») имеет другую точку начала отсчета, но направления всех осей координат остаются прежними (см. рис. 1.3).

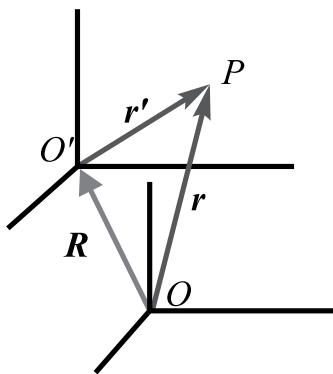


Рис. 1.3 – Переход к новой системе координат с другим началом отсчета

Если координаты нового начала отсчета (точка  $O'$ ) в старой системе («нештрихованная система») характеризуются тройкой чисел  $\mathbf{R}(x_R, y_R, z_R)$ , то новые координаты точки  $P$  находятся элементарно:

$$x' = x - x_R, \quad y' = y - y_R, \quad z' = z - z_R. \tag{1.8}$$

Эти три соотношения можно коротко записать в векторном виде (что видно из расположения соответствующих векторов на рисунке):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}.$$

Можно выделить важный частный случай преобразования (1.8) от неподвижной системы координат  $\mathbf{r}$  к движущейся относительно нее со скоростью  $\mathbf{V}$  системе координат  $\mathbf{r}'$ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - (\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t.$$

## Поворот системы координат

Сложнее случай поворота новой системы координат относительно оси  $Oz$  старой системы на некоторый постоянный угол  $\vartheta$  без изменения масштаба осей и смещения начала отсчета, как показано на рис. 1.4.

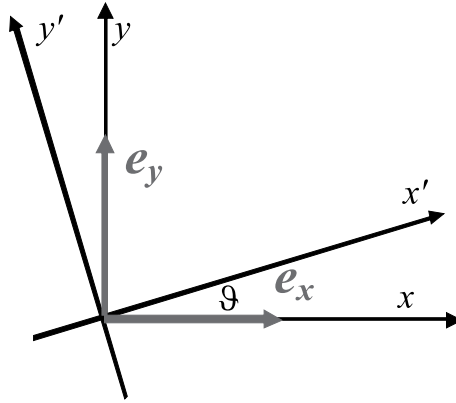


Рис. 1.4 – Переход к новой системе координат при повороте осей координат

*Закон преобразования координат* в этом случае можно вывести следующим образом. Запишем выражения для ортов<sup>1</sup>  $\mathbf{e}$  старой системы координат в новой системе координат:

$$\mathbf{e}_x = \cos \vartheta \cdot \mathbf{e}'_x - \sin \vartheta \cdot \mathbf{e}'_y, \quad \mathbf{e}_y = \sin \vartheta \cdot \mathbf{e}'_x + \cos \vartheta \cdot \mathbf{e}'_y.$$

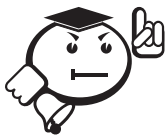
Тогда координаты радиус-вектора произвольной точки  $\mathbf{r}$  в новой системе координат получим простой подстановкой:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y = x \cdot (\cos \vartheta \cdot \mathbf{e}'_x - \sin \vartheta \cdot \mathbf{e}'_y) + y \cdot (\sin \vartheta \cdot \mathbf{e}'_x + \cos \vartheta \cdot \mathbf{e}'_y) = \\ &= (x \cdot \cos \vartheta + y \cdot \sin \vartheta) \cdot \mathbf{e}'_x + (-x \cdot \sin \vartheta + y \cdot \cos \vartheta) \cdot \mathbf{e}'_y = x' \cdot \mathbf{e}'_x + y' \cdot \mathbf{e}'_y. \end{aligned}$$

Теперь понятно, что новые координаты («штрихованные») данного радиус-вектора  $\mathbf{r}$  выражаются линейными функциями старых координат («нештрихованных»):

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad z' = z. \quad (1.9)$$

<sup>1</sup>Орты это — векторы единичной длины, направленные вдоль соответствующих осей координат.



.....  
Аналогичным образом можно вывести закон преобразования координат при произвольном трехмерном повороте осей координат штрихованной системы:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 A_{\alpha\beta} x_\beta. \tag{1.10}$$

- У таких преобразований координат есть общие закономерности:
- новые координаты  $x'_\alpha$  линейно выражаются через старые  $x_\beta$ ;
  - определитель квадратной матрицы, составленный из коэффициентов преобразования  $A_{\alpha\beta}$ , равен 1 (если преобразование не изменяет масштаб единиц измерения).



.....  
**Векторной величиной** будем называть такую упорядоченную совокупность трех чисел, которые при смене системы координат меняются так же, как и координаты точки, то есть по закону типа (1.8)–(1.10).  
.....



.....  
Для чего же мы вводим понятие вектора? Введя законы преобразования проекций и определив некоторые алгебраические операции, мы сможем обращаться с векторами вообще безотносительно к какой-либо конкретной системе координат. В этом смысле, вектор — объект, существующий безотносительно к какой-либо системе координат. Система координат — это всего лишь инструмент, который позволяет выражать в конкретных числах определенные соотношения между векторными величинами. Выбор этого «инструмента» остается за нами, от него не зависит конечный результат расчетов.  
.....

### 1.7 Векторная алгебра

- 1) Начнем с определения операции сложения векторов. Результат сложения двух векторов естественно определить как такой вектор, координаты которого равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов. Это правило наглядно представляется как «правило параллелограмма» (см. рис. 1.5).
- Легко видеть, что относительное выражение вектора  $c$  относительно двух заданных векторов  $a$  и  $b$  не зависит от выбора системы координат.



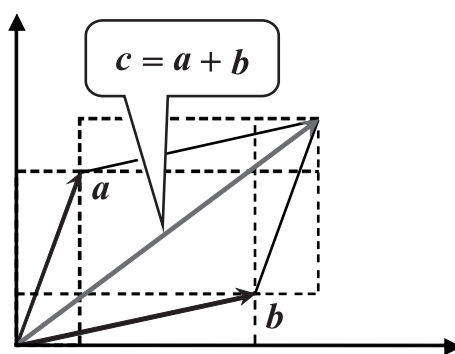


Рис. 1.5 – Правило параллелограмма для суммы двух векторов

- 2) Так же естественно вводится операция умножения вектора на скалярную величину: каждая координата просто умножается на этот скаляр. Если скаляр — это отрицательное число, то вектор-результат имеет направление, противоположное по отношению к исходному вектору.
- 3) Операцию вычитания векторов можно представить как вычитание соответствующих координат двух векторов или сложение первого вектора и второго вектора, умноженного на  $(-1)$ .
- 4) Дифференцируя уравнения преобразования координат (1.9), нетрудно заметить, что скорость — это тоже вектор, так как его компоненты в силу линейности операции дифференцирования также подчиняются нашему уравнению преобразования (1.9).

Это вполне естественно, если представить, что вектор скорости получается как предел отношения разности двух радиус-векторов и скалярного интервала времени (1.6). При этом становится очевидным (см. рис. 1.6), что вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения точки.

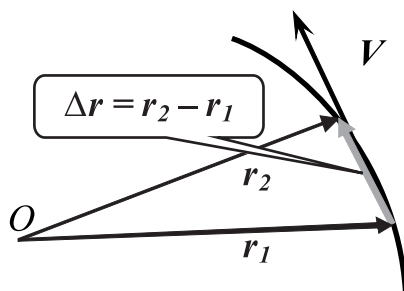


Рис. 1.6 – К определению вектора мгновенной скорости материальной точки

- 5) Продифференцировав любой переменный вектор по времени, мы снова получим какой-то новый вектор. Это касается и вектора ускорения.
- 6) Определим новую операцию с двумя векторами — *скалярное произведение векторов*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.11)$$

Эта величина имеет одинаковое значение в штрихованной и нештрихованной системах. Скалярное произведение инвариантно (то есть не меняет своего значения) по отношению к выбору системы отсчета.



Доказательство

Это можно доказать, например, таким образом. Из (1.11) следует, что  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  представляет собой квадрат длины вектора, одинаковый во всех системах координат. Тогда, рассчитывая квадрат некоторого суммарного вектора  $\mathbf{c}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = c^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 = \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) + 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = a^2 + b^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Из инвариантности длин векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  следует инвариантность скалярного произведения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

Поскольку  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  — это инвариант, то его легко вычислить, выбирая одну из осей координат так, чтобы один из векторов  $\mathbf{a}$  или  $\mathbf{b}$  совпадал с ней (все равно какой). Получим другое выражение для скалярного произведения:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \vartheta, \tag{1.12}$$

где  $a$  и  $b$  модули векторов, а  $\vartheta$  — угол между ними.

Эта формула позволяет вычислить угол между двумя векторами, если известны их проекции:

$$\cos \vartheta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{1.13}$$



Если два вектора перпендикулярны друг другу, то их скалярное произведение равно нулю.



Контрольные вопросы по главе 1

- 1) Какие объекты обязательны для определения системы отсчета?
- 2) Какими свойствами должно обладать устройство или явление, чтобы его можно было использовать в качестве часов?
- 3) Какой характер носит движение материальной точки, если ее средняя скорость всегда равняется ее мгновенной скорости?
- 4) Всегда ли столкнутся две частицы, если их траектории пересекаются?
- 5) Укажите, по крайней мере, два способа вычисления скалярного произведения двух векторов.
- 6) Как сформулировать «правило параллелограмма» для нахождения разности двух векторов?
- 7) Для чего вводится понятие вектора в физике? Можно ли без него обойтись при расчете траектории движения материальной точки?

---

# Глава 2

## КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

---

### 2.1 Скорость и ускорение при криволинейном движении

На рисунке 2.1 показаны часть траектории и векторы скорости материальной точки в два последовательных момента времени  $v_1$  и  $v_2$ . Ранее было показано, что вектор мгновенной скорости всегда направлен вдоль касательной линии к траектории движения.

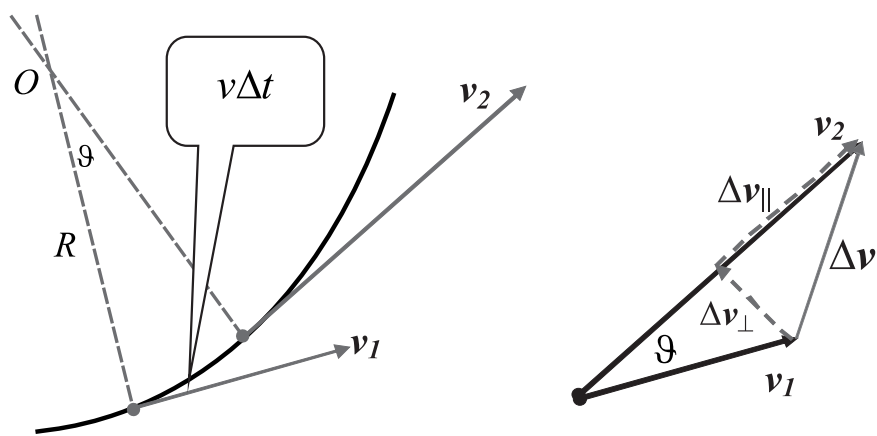


Рис. 2.1 – Изменение скорости при криволинейном движении точки

Теперь обратимся к вектору ускорения и определим его величину и направление. Для этого нам необходимо знать, как меняется вектор скорости для двух очень близких моментов времени, разделенных малым интервалом  $\Delta t$ . Будем считать, что указанные векторы скорости  $v_1$  и  $v_2$  именно таковы.

Тогда длина траектории между двумя этими моментами может быть представлена как дуга окружности, центр кривизны которой расположен в точке  $O$  пере-

сечения перпендикуляров к траектории в два момента времени, а расстояние от центра кривизны до траектории равно *мгновенному радиусу кривизны траектории*  $R$ .

Совместим теперь начало двух векторов скорости и найдем вектор приращения скорости  $\Delta \mathbf{v}$  за интервал времени  $\Delta t$ , как показано на рис. 2.1 справа.

Вектор приращения скорости  $\Delta \mathbf{v}$  можно разделить на две части: продольную  $\Delta v_{\parallel}$  и поперечную  $\Delta v_{\perp}$  компоненты по отношению к вектору скорости. Тогда можно определить *продольное ускорение* (его еще называют *тангенциальным*), которое будет равно производной модуля вектора скорости точки  $v$ :

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\parallel}}{\Delta t} = \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{v_x \frac{dv_x}{dx} + v_y \frac{dv_y}{dx} + v_z \frac{dv_z}{dx}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{v}. \quad (2.1)$$



.....  
**Продольное ускорение** точки равно проекции вектора ускорения  $\mathbf{a}$  на направление вектора скорости  $\mathbf{v}$ .  
 .....

Искомая проекция может быть определена как частное от деления скалярного произведения этих векторов  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})$  на модуль скорости  $v$  или как производная модуля скорости по времени  $v'(t)$ .

Другую, нормальную (от слова *нормаль* — перпендикуляр), составляющую ускорения можно вычислить, также взглянув на рис. 2.1. Так, поперечная проекция вектора приращения скорости  $\Delta v_{\perp} \cong v \cdot \vartheta$  ( $\vartheta$  — угол между направлениями векторов скорости  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ ), с другой стороны, угол  $\vartheta \cong v \Delta t / R$  как отношение длины дуги окружности к ее радиусу. Поэтому *нормальное ускорение* точки равно:

$$a_n \approx \frac{\Delta v_{\perp}}{\Delta t} = \frac{v \vartheta}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t} \cdot \frac{v \Delta t}{R} = \frac{v^2}{R}, \quad (2.2)$$

где  $R$  — радиус кривизны траектории в данной точке. Эту составляющую ускорения, направленную к центру кривизны, называют также *центростремительным ускорением*.



.....  
**Центростремительное ускорение** равно частному от деления квадрата модуля скорости к радиусу кривизны траектории в данной точке.  
 .....

Естественно, что вектор ускорения в общем случае имеет обе проекции: тангенциальную (2.1) и нормальную (2.2), и направлен под некоторым углом  $\alpha$  к вектору скорости:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{av}, \quad (2.3)$$

который может быть как острым ( $\cos \alpha > 0$ ), так и тупым ( $\cos \alpha < 0$ ). Из выражений (2.1) и (2.3) следует частная теорема:



.....  
Если модуль скорости не изменяется в процессе движения материальной точки, то при криволинейном движении ускорение всегда перпендикулярно скорости (или равно нулю в случае прямолинейной траектории).  
.....

Отметим, что формулу (2.2) можно использовать при выводе аналитического выражения для радиуса кривизны  $R$  траектории. Основная идея вывода состоит в следующем преобразовании:

$$a_\tau^2 = a^2 - a_n^2 = a^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})^2}{v^2} = \frac{(v_x a_y - v_y a_x)^2 + (v_z a_x - v_x a_z)^2 + (v_y a_z - v_z a_y)^2}{v^2} = \frac{c^2}{v^2}. \tag{2.4}$$

Мы видим, что в числителе получилось выражение, которое можно понимать как квадрат модуля некоторого вектора  $\mathbf{c}$ , проекции которого выражаются через проекции векторов скорости и ускорения. Сравнивая (2.4) с (2.2), нетрудно получить выражение для радиуса кривизны как в общем случае трехмерной траектории, так и для плоской траектории, когда одна из проекций векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  равна нулю:

$$R = \frac{v^3}{c}, \quad R(v_z = 0, a_z = 0) = \frac{(\sqrt{v_x^2 + v_y^2})^3}{|v_x a_y - v_y a_x|}. \tag{2.5}$$

Комбинации проекций двух векторов, стоящие в числителе формулы (2.4), нам будут часто встречаться, и поэтому остановимся на этом моменте подробнее.

## 2.2 Векторное произведение

Оказывается, в трехмерном пространстве можно ввести еще один, принципиально отличный от сложения, способ получения нового вектора из двух имеющихся. Если у нас есть два каких-то вектора  $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$  и  $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$ , то можно построить вектор  $\mathbf{c}$  со следующими компонентами:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x. \tag{2.6}$$

Такой вектор  $\mathbf{c}$  является результатом операции, которая получила название *векторного произведения* и обозначается так:  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  или  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .



.....  
Мы ниже везде для обозначения векторного произведения будем использовать крестик, а не квадратные скобки (как это принято в математике), которые в сложных физических выражениях удобнее использовать для других целей.  
.....

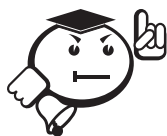


.....  
Для удобства запоминания трех выражений (2.6) достаточно помнить только первую формулу в (2.6), а затем воспользоваться циклической перестановкой символов  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ , получая из первой комбинации две остальные.  
.....

Еще проще запомнить выражения для компонент (2.6), записывая определитель третьего порядка, первые строки которого образуются ортами системы координат:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

(2.7)



Вектор, полученный в результате одной операции векторного произведения двух других обычных векторов, называется *аксиальным вектором* или *псевдовектором*. В отличие от обычного вектора, называемого *полярным*, при отражении в зеркале аксиальный вектор меняет знак. Аксиальный вектор — это математический объект исключительно трехмерного пространства, в пространствах других измерений таких векторов не существует.

Нетрудно показать прямой подстановкой, что при переходе к повернутой вокруг оси  $Oz$  на угол  $\vartheta$  новой системе координат компоненты вектора  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  преобразуются в соответствии с правилами (1.9).

Свойства векторного произведения:

- 1) Векторное произведение антикоммутативно:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .
- 2) Вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен одновременно обоим векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . При этом договорились считать тройку осей правой, если ось  $Oz$  направлена как правый винт при вращении оси  $Ox$  к оси  $Oy$ . В этом случае  $z$ -компонента вектора  $\mathbf{c}$  имеет положительное значение, если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  образуют между собой угол, меньший  $180^\circ$ .
- 3) Модуль векторного произведения  $c = ab \cdot \sin \alpha$  ( $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ). Это свойство доказывается выбором осей: одна ось координат идет вдоль вектора  $\mathbf{a}(a, 0, 0)$ , второй вектор  $\mathbf{b}(b \cdot \cos \alpha, b \cdot \sin \alpha, 0)$  помещается в плоскость  $xOy$ , тогда  $z$ -компонента результата (2.6) даст искомую величину). Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, как показано на рис. 2.2.

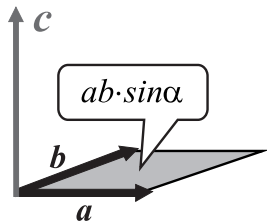


Рис. 2.2 – Векторное произведение

4)



.....  
Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.  
В частности,  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ .  
.....

5) Векторное произведение — операция линейная:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad (\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

6) Полезно определить последовательное применение операции скалярного и векторного произведения:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.8}$$

Здесь группа трех векторов образует так называемое *смешанное произведение*, которое численно равна объему параллелепипеда, построенного на тройке векторов. Из равенства определителя (2.8) нулю при одинаковых строках или столбцах следует теорема:



.....  
Если три вектора лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю.  
.....

7) Очень полезна формула для двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{2.9}$$

Это равенство показывает, что вектор-результат двойного векторного произведения лежит в плоскости векторов-сомножителей первой операции векторного произведения.

Теперь можно сформулировать общий рецепт нахождения продольных и поперечных проекций одного вектора  $\mathbf{a}$  на другой вектор  $\mathbf{b}$ :

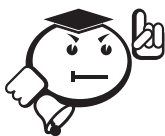
- а) Чтобы найти проекцию вектора  $\mathbf{a}$  на направление вдоль вектора  $\mathbf{b}$ , надо найти число  $a_{\parallel b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / b$ . Эту формулу мы получили при выводе выражения для продольного ускорения (2.1).
- б) Чтобы найти проекцию вектора  $\mathbf{a}$  на направление, перпендикулярное вектору  $\mathbf{b}$ , надо найти число  $a_{\perp b} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| / b$ . Именно этот случай мы имели при выводе нормальной проекции ускорения (2.4).

### 2.3 Кинематика вращательного движения

Перейдем к описанию *вращательного движения*. Рассмотрим простейший случай такого движения — вращение *абсолютно твердого тела* вокруг неподвижной оси.



.....  
*Абсолютно твердым телом* называется такое тело, у которого расстояние между любыми его материальными точками не меняется. Абсолютно твердое тело не меняет своей формы.  
.....



.....  
Абсолютно твердых тел не существует. Дело в том, что теория относительности запрещает передачу любых взаимодействий, распространяющихся быстрее света. Если бы существовал абсолютно твердый стержень, то перемещение одного его конца влекло за собой мгновенное перемещение второго конца. Но это как раз и запрещает теория относительности. Подробнее об этом смотри в главе 12 «Принцип относительности».  
.....

Все точки такого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения, как показано на рис. 2.3. Радиус-вектор каждой точки поворачивается за время  $\Delta t$  на один и тот же угол  $\varphi$ , тогда как пути, пройденные точками, зависят от их удаления от оси вращения. Поэтому вращение твердого тела удобно описывать, введя понятие *вектора угловой скорости*  $\omega$ .

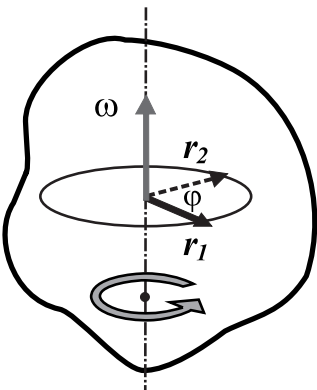


Рис. 2.3 – Определение вектора угловой скорости



.....  
*Вектор угловой скорости* направлен вдоль оси вращения в сторону поступательного движения правого винта.  
.....

Модуль этого вектора  $\omega$  равен числу радиан, на которое поворачивается твердое тело в единицу времени



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.10)$$

Если вращение равномерное, то  $\omega = \text{const}$ , и вращательное движение тела можно характеризовать *периодом вращения*  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f. \quad (2.11)$$

Здесь введена величина  $f$ , которую в отличие от угловой скорости  $\omega$  называют *частотой вращения* и измеряют как число полных оборотов в единицу времени.

Вектор  $\omega$  может изменяться как за счет увеличения скорости вращения, так и за счет поворота в пространстве самой оси вращения. Вектор *углового ускорения*  $\epsilon$  учитывает в общем случае оба вида движения:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.12)$$

Три вектора — линейной скорости  $\mathbf{v}$ , угловой скорости  $\omega$  и радиус-вектор точки  $\mathbf{r}$  — связаны простым векторным выражением:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) вытекает связь между модулем радиус-вектора и расстоянием от точки до оси вращения:

$$\rho = r \cdot \sin \alpha, \quad v = \omega \cdot \rho, \quad (2.14)$$

где  $\alpha$  — угол между радиус-вектором  $\mathbf{r}$  и вектором  $\omega$  (осью вращения твердого тела). Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости.

При угловом ускорении  $\epsilon \neq 0$  точка тела, удаленная от оси на расстояние  $\rho$ , испытывает нормальное (центростремительное)  $a_n$  и тангенциальное ускорение  $a_\tau$ , линейно растущее с ростом  $\rho$ :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \cdot \rho, \quad a_\tau = \epsilon \cdot \rho. \quad (2.15)$$

Это значит, что даже при неравномерном вращении тела угол  $\alpha$  между вектором ускорения  $\mathbf{a}$  и вектором линейной скорости  $\mathbf{v}$  остается одинаковым для всех точек абсолютно твердого тела:

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\omega^2}{\epsilon}. \quad (2.16)$$

Но этот угол  $\alpha$  не остается постоянным во времени. Если угловое ускорение  $\epsilon$  неизменно, центростремительное ускорение все равно растет как квадрат угловой скорости, а тангенциальное остается постоянным. Поэтому со временем угол  $\alpha$  все больше приближается к прямому углу  $\alpha \rightarrow \pi/2$ .

## 2.4 Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Тело брошено с начальной скоростью  $V$  под углом  $\alpha$  к горизонту (см. рис. 2.4). Мы должны, исходя из этих данных и равноускоренности вертикального движения, определить:

- а) максимальную высоту подъема тела  $H$ ;
- б) время горизонтального полета  $T$ ;
- в) дальность полета в горизонтальном направлении  $L$ ;
- г) радиус кривизны траектории в верхней точке  $R$ ;
- д) интервал времени  $t_0$ , через который вектор мгновенной скорости тела будет ортогонален вектору начальной скорости.

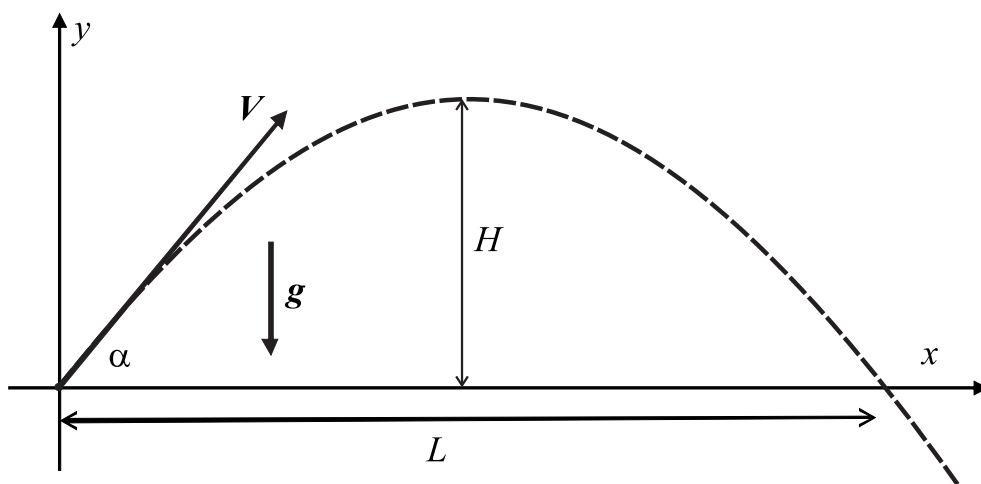


Рис. 2.4 – Расчет траектории тела, брошенного под углом к горизонту

Выбираем начало отсчета  $O$  в точке броска, одну ось координат  $Ox$  направим в сторону броска в горизонтальном направлении, а вторую ось  $Oy$  ортогонально первой вверх.

Записываем проекции заданных векторов начальной скорости  $\mathbf{v}_0$  и ускорения  $\mathbf{a}$  в данной системе координат, обращая внимание на знаки:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 : \quad v_{x0} &= V \cos \alpha, & v_{y0} &= V \sin \alpha, \\ \mathbf{a} : \quad a_x &= 0, & a_y &= -g. \end{aligned}$$

Записываем уравнение движения тела вдоль каждой оси, то есть пишем зависимость координат тела от времени:

$$x(t) = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = Vt \cos \alpha, \quad (2.17)$$

$$y(t) = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = Vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.18)$$

Приравнивая координату  $y$  нулю, можно определить, что это значение имеет место в два момента времени:  $t_1 = 0$  и  $t_2 = 2V \cdot \sin \alpha / g$ . Очевидно, что  $t_2$  и есть время горизонтального полета  $T$ :

$$T = \frac{2V \sin \alpha}{g}. \quad (2.19)$$

Подставляя это время полета в уравнение (2.17) для  $x$ -координаты, получим дальность горизонтального полета  $L$ :

$$L = V \cos \alpha \cdot T = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (2.20)$$

Вычисляем две проекции вектора мгновенной скорости тела:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = V \cos \alpha, \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt} = V \sin \alpha - gt. \quad (2.21)$$

Из второго уравнения (2.21) видно, что вертикальная проекция скорости обращается в нуль в момент времени:

$$t_m = \frac{V \sin \alpha}{g}. \quad (2.22)$$

Очевидно, что это время и будет отвечать верхней точке траектории. Чтобы найти высоту  $H$  этой точки достаточно подставить (2.22) в выражение (2.18) для  $y$ -координаты точки:

$$H = V \sin \alpha \cdot t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 = \frac{V^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (2.23)$$

Чтобы найти радиус кривизны траектории в ее верхней точке, достаточно подставить во вторую формулу (2.5) соответствующие проекции векторов:

$$R = \frac{v^3}{|v_x a_y - v_y a_x|} = \frac{(V \cos \alpha)^3}{Vg \cos \alpha} = \frac{V^2}{g} \cos^2 \alpha. \quad (2.24)$$

И наконец, чтобы найти момент времени, когда вектор мгновенной скорости тела станет ортогональным к вектору начальной скорости, необходимо воспользоваться критерием ортогональности векторов — равенство нулю скалярного произведения. Запишем этот критерий применительно к искомой ситуации, воспользовавшись формулами (2.19):

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}(t_0) = v_{x0}v_x(t_0) + v_{y0}v_y(t_0) = V^2 \cos^2 \alpha + V \sin \alpha (V \sin \alpha - gt_0) = 0.$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного времени  $t_0$  и получаем:

$$t_0 = \frac{V}{g \sin \alpha}. \quad (2.25)$$



## Контрольные вопросы по главе 2

- 1) Если заданы все проекции векторов скорости и ускорения в некоторый момент времени, то как вычислить «скорость изменения модуля скорости» точки в данный момент?
- 2) Если заданы модули вектора скорости и ускорения и угол между ними, то как можно найти величину центростремительного ускорения точки в этот момент времени?
- 3) Как в общем случае может быть направлен вектор ускорения по отношению к вектору скорости?
- 4) Если тело равномерно вращается со скоростью 10 оборотов в минуту, то какова угловая скорость вращения этого тела?
- 5) Как зависит линейное ускорение точек равномерно вращающегося тела от их расстояния до оси вращения?
- 6) Тело брошено под углом к горизонту. Зависит ли отношение высоты параболической траектории к ее радиусу кривизны в точке максимального подъема от величины начальной скорости тела?

---

# Глава 3

## ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ

---

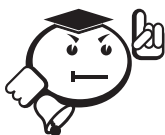
### 3.1 Понятие силы

До сих пор мы изучали кинематические характеристики заданного вида движения материальной точки: траектория, скорость, ускорение и т. п. безотносительно к причинам, вызывающим именно такое движение. Сейчас мы займемся выяснением причин, приводящих к конкретному виду движения. Этот раздел механики, изучающий взаимодействие тел, называется *динамикой*. Для начала определим понятие силы.



.....  
**Сила** — это количественная мера взаимодействия как минимум двух тел.  
.....

Говоря о силе, мы всегда неявно предполагаем ее материальный характер. То есть мы обычно считаем силу, действующую на тело, равной нулю, если поблизости нет других тел. И наоборот, если видим, что сила не равна нулю, то ищем по соседству ее источник.



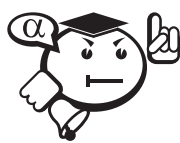
.....  
Отметим, что иногда очень удобно описывать взаимодействия тел посредством *силового поля* (гравитационного, электромагнитного), когда можно формально отвлечься от положения и формы одного из тел, которое принимается за источник силового поля. В последнем случае можно говорить о силовом воздействии со стороны поля на одну-единственную материальную точку.  
.....

Взаимодействие тел может проявляться двумя способами: изменением либо скорости тел, либо формы тел. В последнем случае говорят о *деформации* тела. Оба этих эффекта могут быть использованы для измерения силы.

Практика показывает, что сила — это векторная величина, то есть она преобразуется при переходе к другой системе отсчета, так же как и координаты. Векторный характер силы выражается и в том, что различные силы, одновременно приложенные к данному телу, можно складывать как любые векторы: результирующая (суммарная) сила всегда дает такой же эффект, как и одновременное действие складываемых сил.

Впервые количественное описание движения тел при воздействии на них заданной силы дал Исаак Ньютон.

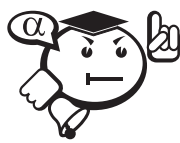
*Первый закон Ньютона* гласит:



.....  
Любое тело, будучи предоставленное самому себе, то есть когда действие на него всех сил уравновешено, остается в покое или движется с постоянной по величине и направлению скоростью неограниченно долго или пока не появится сила, изменяющая это состояние равномерного движения.  
.....

### 3.2 Второй закон Ньютона. Масса

*Второй закон Ньютона* гласит:



.....  
Вектор ускорения ***a*** материальной точки пропорционален вектору силы ***F*** и обратно пропорционален ее массе ***m***.  
.....

Удобнее этот закон записать как

$$ma = F. \tag{3.1}$$

Векторное уравнение (3.1) — это краткая запись трех уравнений движения для каждой проекции ускорения и силы:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z. \tag{3.2}$$

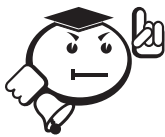
В формулировке (3.1) появляется новая скалярная физическая величина — масса. По смыслу уравнения (3.1):



.....  
**Масса** — это количественная мера инертности тела.  
.....

Чем больше масса тела, тем меньшее ускорение оно приобретает под воздействием фиксированной силы.

Опыт показывает, что масса тела является очень «удобной» с практической точки зрения физической величиной: помимо «инертности» масса тела обладает свойствами сохранения и аддитивности. Свойство *сохранения* означает, что масса тела не зависит от выбора системы отсчета и не меняется во времени. Свойство *аддитивности* означает, что масса составного тела равняется сумме масс его частей.



.....

Как показало последующее развитие физики, два вышеупомянутых свойства массы являются не точными, а приближенными. В действительности масса тела зависит от скорости его движения, а масса составного тела не равна сумме масс его частей. Но эти отклонения заметны только при скоростях движения тел, близких к скорости света. Точные законы движения тел с произвольными скоростями, учитывающие непостоянство массы, были предложены Эйнштейном в рамках *специальной теории относительности*.

.....

В силу указанных свойств массу тел легко измерять практически, и поэтому она наряду с длиной и временем является основной (первичной) физической величиной.



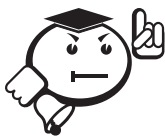
.....

*В системе СИ единицей массы является 1 кг, с очень высокой точностью это масса 1 литра чистой воды при температуре 4 °C и атмосферном давлении.*

.....

Именно второй закон Ньютона дает конструктивное определение силы: чтобы измерить силу, надо измерить ускорение тела при известной его массе.

После введения единиц длины и времени — метра и секунды, очевидно, что силу следует измерять в (кг·м/с<sup>2</sup>). Эта производная единица получила название *Ньютон*: сила в 1 Н придает телу массой 1 кг ускорение в 1 м/с<sup>2</sup>, что можно записать так: 1 Н = 1 кг·м/с<sup>2</sup>.



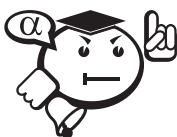
.....

В другой системе единиц (система СГС), в которой основными являются *сантиметр, грамм и секунда*, единица силы называется *дина*: 1 *дин* = 10<sup>-5</sup> Н.

.....

### 3.3 Третий закон Ньютона

*Третий закон Ньютона гласит:*



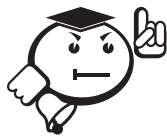
.....

Сила, действующая со стороны первого тела на второе, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны второго тела на первое:

$$F_{12} = -F_{21}.$$

(3.3)

.....



.....

Ниже мы увидим, что при очень больших скоростях движения тел третий закон в сформулированном выше виде не будет выполняться, так как в таких ситуациях необходимо будет учитывать конечную скорость передачи взаимодействия (она не может быть выше скорости света).

Ситуация, когда не выполняется третий закон Ньютона, типична также для тех случаев, когда рассматривается взаимодействие материальной точки с силовым полем: на точку со стороны поля сила действует, а противодействующей силы, приложенной к другому телу, нет.

.....

Третий закон (3.3) обеспечивает процедуру измерения силы. Так, например, динамометр показывает силу, с которой тело растягивает его пружину, но одновременно мы должны считать, что именно с такой же по величине силой пружина действует на тело. Вторая сила является как бы реакцией на первую, как показано на рис. 3.1. Ее иногда так и называют *силой реакции*.

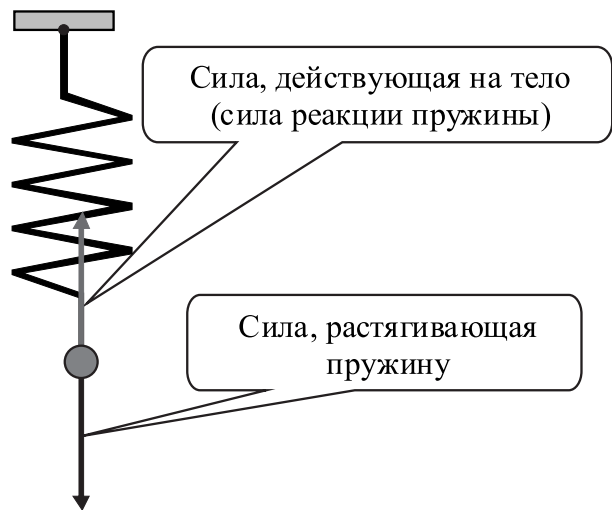


Рис. 3.1 – Третий закон Ньютона для груза на пружине



.....

Обращаем особое внимание, что две силы (3.3) всегда приложены к различным телам.

.....

Предположение о равенстве сил (3.3) самое простое. Опыт показывает, что третий закон Ньютона всегда выполняется, если временем передачи взаимодействия между телами можно пренебречь.



### 3.4 Инерциальные системы отсчета

Иногда считают, что первый закон Ньютона является следствием второго закона (3.1), если в последнем положить  $F = 0$ . Это не совсем так. Ведь не очевидно, что можно вообще создать ситуацию, в которой на тело не действуют никакие силы (этого сделать практически невозможно).



.....  
*Первый закон постулирует, что теоретически существуют такие особые системы отсчета, в которых сохраняется равномерное движение тела, если все силы, действующие на него, уравновешены. Такие системы отсчета называются **инерциальными**.*  
.....

Нетрудно показать, что если есть хоть одна такая система, то их должно быть бесконечно много. Действительно, все системы отсчета, движущиеся равномерно относительно какой-либо инерциальной системы, тоже являются инерциальными. Это следует из того факта, что в уравнение движения (3.1) входит ускорение материальной точки, а не ее скорость. А ускорение тела не меняется, если к его мгновенной скорости в одной системе отсчета  $v(t)$  добавить любую постоянную во времени скорость  $V$ :

$$a = \frac{d}{dt} (v + V) = \frac{dv}{dt}, \quad V = \text{const}.$$



.....  
*Мы можем пользоваться и такими системами отсчета, в которых тела даже при полностью уравновешенных силах будут двигаться с ускорением. Такие системы называются **неинерциальными**, и в них не выполняются законы Ньютона.*  
.....

В качестве примера можно назвать систему отсчета, привязанную к неравномерно движущемуся поезду. В такой системе отсчета различные тела будут самопроизвольно (с точки зрения наблюдателя) ускоряться и перемещаться, хотя никаких видимых взаимодействий с окружающими телами не появляется. Таким образом, с точки зрения этого наблюдателя, первый закон Ньютона перестает быть справедливым.



.....  
*Законы Ньютона верны только в инерциальных системах отсчета.*  
.....

Для того чтобы можно было по-прежнему пользоваться этими законами даже в неинерциальных системах, мы вынуждены будем вводить так называемые «псевдосилы инерции». Эти псевдосилы не отвечают никакому взаимодействующему телу (то есть не являются материальными силами), а связаны только и исключительно с тем, что система отсчета наблюдателя движется с ускорением относительно инерциальных систем отсчета.

На рис. 3.2 показано начало поворота автомобиля, на гладком полу которого находится шар. При повороте автомобиля шар продолжает движение по инерции в соответствии с первым законом Ньютона. Но в неинерциальной системе отсчета, связанной с автомобилем, шар приходит в движение, как будто бы на него подействовала сила, направленная вправо. В реальности никаких сил, конечно же, нет.

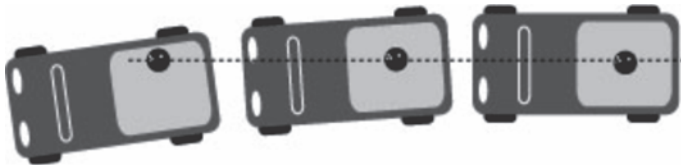


Рис. 3.2 – Система отсчета автомобиля при его повороте неинерциальная

### 3.5 Неинерциальные системы отсчета

Наблюдатель, расположенный в неинерциальной системе отсчета, испытывает воздействие так называемых *псевдосил инерции*, которые нельзя соотнести с каким-либо телом, со стороны которого они бы действовали. В такой системе отсчета законы Ньютона необходимо поправить.

Так, если система отсчета  $K'$  (величины, измеренные в этой системе, будем обозначать символами со штрихами) имеет постоянное по величине и направлению ускорение  $A$  относительно инерциальных систем отсчета, то во второй закон Ньютона, описывающий движение тела в этой системе отсчета, кроме реальных сил  $F$ , необходимо добавить член, описывающий «псевдосилу инерции», который пропорционален массе этого тела. Даже если реальные силы отсутствуют, тела в неинерциальной системе движутся не равномерно, а с ускорением  $a' = -A$ :

$$ma' = F - mA.$$

Эти «силы инерции» не только сообщают телам ускорения, но и отклоняют подвесы от вертикального направления, деформируют закрепленные тела и т. п. С точки зрения наблюдателя эти силы вполне осязаемы (их можно измерить), но с физической точки зрения это не настоящие силы, так как нет второго тела — источника силы. Появление «сил инерции» вызвано исключительно неравномерным движением системы отсчета наблюдателя относительно инерциальных систем.



.....  
Все псевдосилы инерции, вызванные неинерциальностью системы отсчета, обязательно пропорциональны массам тел, на которые они воздействуют.  
.....

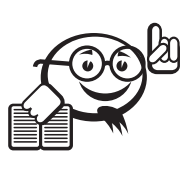
Современные приборы позволяют обнаруживать неинерциальность большинства систем отсчета, используемых в окружающем мире. Инерциальными системами являются лишь те, которые движутся равномерно относительно системы,

центр которой связан с самым массивным ближайшим телом — Солнцем, а оси координат неподвижны относительно самых удаленных звезд. Эта система отсчета называется *гелиоцентрической*.

В неинерциальной вращающейся системе отсчета, связанной с Землей, появляются псевдосилы инерции, величина и направление которых довольно сложно зависят от положения наблюдателя, а также величины и ориентации скорости его движения относительно оси вращения Земли.

### 3.6 Принцип относительности Галилея

Следствием первого закона Ньютона является утверждение:



.....  
Если наблюдатель находится в инерциальной системе отсчета, то все тела, на которые не действуют силы, будут находиться в покое или двигаться с постоянными скоростями.  
.....

Всегда можно выбрать систему отсчета так, чтобы, по крайней мере, одно тело, на которое не действуют силы (или действие всех сил уравновешено), в ней покоилось.



.....  
Состояние покоя и равномерного прямолинейного движения эквивалентны.  
.....

Опыт показывает, что силы — это векторы, то есть они преобразуются по известному для векторов закону. В частности, при переходе к другой инерциальной системе сохраняется модуль силы. А значит, и вид уравнения движения (3.1), в которое входит ускорение, остается неизменным во всех инерциальных системах отсчета. Физически это означает, что все законы механики, а значит, и поведение физических тел, одинаково во всех таких системах.



.....  
*Это утверждение называется **принципом относительности**, который впервые сформулировал Галилей: никакой механический эксперимент не позволяет обнаружить абсолютное движение инерциальной системы отсчета, то есть нельзя определенно сказать, что какая-то инерциальная система является преимущественной — все инерциальные системы равноправны.*  
.....

Математически принцип Галилея выражается в том, что если координаты  $\mathbf{r}$  всех взаимодействующих тел одновременно подвергнуть преобразованию

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V} \cdot t,$$

(3.4)

где  $V$  — постоянный произвольный вектор, то все их относительные скорости и ускорения не изменятся. Это вытекает из того, что уравнения движения (3.1) никак не изменяются при преобразовании координат (3.4).

### 3.7 Примеры различных сил

#### Сила тяжести

Вблизи поверхности Земли на все без исключения массивные тела действует сила тяжести, равная произведению массы тела на *ускорение свободного падения*  $g$ , которое в среднем равно  $9.81 \text{ м/с}^2$ :

$$F = mg. \tag{3.5}$$

Опыты показывают, что с очень высокой точностью ускорение свободного падения одинаково для всех тел, независимо от их формы, агрегатного состояния, химического состава и массы. Сила тяжести направлена к центру Земли.



.....  
Причиной силы тяжести является гравитационное притяжение Земли. Естественно, что на других планетах ускорение свободного падения будет иметь другую величину.  
Даже на Земле величина ускорения свободного падения зависит от широты места (на полюсе оно немного больше, чем на экваторе), распределения различных пород в глубине земли и т. п.  
.....

#### Сила упругости

Силы упругости всегда возникают, если происходит *деформация* твердого тела, то есть изменение его формы. Если относительное изменение формы тела невелико, то сила упругости пропорциональна изменению размера тела. Эта пропорциональность впервые была экспериментально установлена Робертом Гуком и известна в физике как *закон Гука*:



.....  
Сила упругости линейно меняется с изменением размера твердого тела и направлена противоположно направлению деформации.  
.....

Можно твердому веществу придать специальную форму, например скрученной спирали (пружина), тогда закон Гука хорошо выполняется даже при относительно большой деформации. Мы будем писать выражение для силы упругости при одномерной деформации (растяжение или сжатие вдоль одного направления) в следующем виде:

$$F = -k(x - x_0). \tag{3.6}$$

Здесь  $x_0$  — координата свободного состояния пружины, когда она не растянута и не сжата, а коэффициент пропорциональности  $k$  называется *жесткостью пружины* и имеет размерность Н/м.

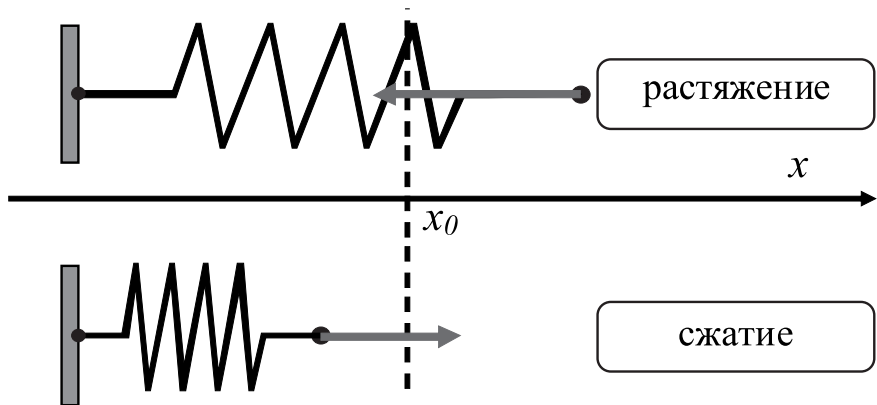


Рис. 3.3 – Сила упругости — это сила реакции пружины на деформацию

Напомним, что сила упругости (3.6) — это сила, действующая со стороны деформированной пружины на тело, прикрепленное к концу пружины, как показано стрелками на рис. 3.3. Именно эту силу испытывает человек, растягивающий или сжимающий пружину.

Простота закономерности (3.6) позволяет изготовить прибор для измерения силы — *динамометр*. В этом приборе измерительная шкала, расположенная параллельно пружине, проградуирована непосредственно в единицах силы (Н).

Сила трения

Для начала рассмотрим только силу трения, возникающую при контакте двух твердых тел. Такое трение называется сухим.

Возможны две принципиально различные ситуации:

- а) трение, которое не позволяет двум телам проскальзывать друг относительно друга. Сила, не позволяющая проскальзывать соприкасающимся поверхностям, называется силой *трения покоя*;
- б) сила касательного взаимодействия, возникающая при взаимном проскальзывании двух поверхностей твердых тел, называется силой *трения скольжения*.

Эти силы имеют общую природу: межмолекулярное взаимодействие и шероховатость поверхностей, но их свойства существенно различаются.



.....  
**Сила трения покоя  $F_{rest}$  всегда равна по величине и противоположна по направлению той силе  $F$  (назовем ее движущей силой), которая стремится сдвинуть одно тело относительно другого.**  
.....

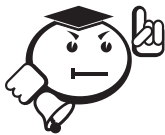


.....  
**Сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления между телами**

$$F_{fr} = \mu N \tag{3.7}$$

*и всегда направлена противоположно направлению относительного проскальзывания поверхностей.*  
.....

Безразмерный коэффициент пропорциональности  $\mu$  называется коэффициентом трения скольжения. В реальных ситуациях сухого трения его величина в зависимости от свойств соприкасающихся поверхностей может изменяться в диапазоне от 0.01 до  $\sim 1$ .



.....  
Хотя сила трения скольжения на практике зависит от скорости взаимного проскальзывания тел, но эта зависимость довольно слабая. Поэтому мы везде будем считать силу трения скольжения не зависящей от скорости.  
.....

Сила нормального давления



.....  
**Силой нормального давления называется сила, действующая на тело в месте контакта ортогонально плоскости соприкосновения.**  
.....

На рис. 3.4 изображены силы взаимодействия, приложенные к прямоугольному телу со стороны плоскости: сила трения скольжения  $F_{fr}$  и сила реакции опоры  $N$ . Следует напомнить, что в силу третьего закона Ньютона такие же по величине, но противоположно направленные силы приложены и к нижней плоскости !!!

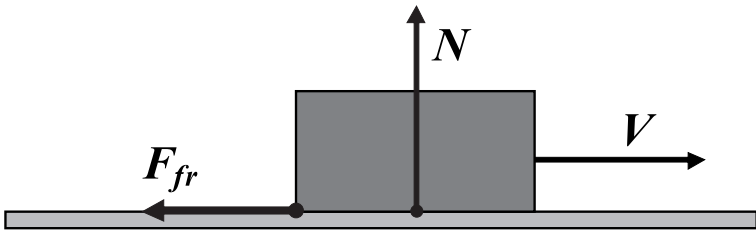


Рис. 3.4 – Силы взаимодействия, приложенные к скользящему по поверхности телу

Сила трения покоя всегда остается меньше силы трения скольжения:

$$F_{rest} \leq F_{fr} = \mu N. \tag{3.8}$$

Поэтому тело, которое стремится сдвинуть какая-то движущая сила  $F$ , будет находиться в покое, пока выполняется неравенство (3.8). Проскальзывание двух тел начнется только после того, как движущая сила превысит силу трения скольжения.

Упомянем еще одну силу сухого трения — *силу трения качения*. Она ответственна за то, что катящееся без проскальзывания по гладкой поверхности круглое тело со временем останавливается.



.....  
Так как сила трения качения обычно во много раз меньше силы трения скольжения, то при решении задач будем трением качения полностью пренебрегать.  
.....

Силы электромагнитной природы будут подробно изучены в других разделах курса физики.



.....  
**Контрольные вопросы по главе 3**  
.....

- 1) В чем проявляется действие на тело силы?
- 2) Может ли покоящееся в некоторой системе отсчета тело начать движение без приложения к нему внешней силы?
- 3) Из трех законов Ньютона один является не точным, а приближенным. Какой это закон? В каких случаях этот закон можно использовать как точный?
- 4) В чем состоит суть принципа относительности Галилея? Что, по-вашему, носит более общий характер: законы Ньютона или принцип Галилея?
- 5) Приведите реальные примеры, когда систему отсчета можно считать инерциальной.
- 6) Может ли, по-вашему, сила трения покоя привести тело в движение?
- 7) Действует ли сила трения покоя на тело, лежащее на горизонтальной поверхности?
- 8) Если сила упругости монотонно растет с ростом деформации пружины, то можно ли полагать, что выполняется закон Гука?

---

# Глава 4

## ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ

---

### 4.1 Центр инерции (центр масс) протяженного тела

Рассмотрим макроскопическую систему взаимодействующих материальных точек. Частным случаем такой системы является протяженное материальное тело. Для каждой материальной точки составной системы можно записать уравнение движения:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_j f_{ij} + F_i, \tag{4.1}$$

где  $f_{ij}$  — вектор силы, действующей на  $i$ -ую материальную точку тела со стороны  $j$ -ой материальной точки, а  $F_i$  — внешняя сила, действующая на  $i$ -ую частицу. На рисунке 4.1 для определенности показаны 4 материальные точки, тонкими стрелками показаны внутренние силы  $f_{ij}$ , действующие между материальными точками тела, а жирными стрелками показаны внешние силы  $F_i$ , действующие на точки тела со стороны внешних тел.

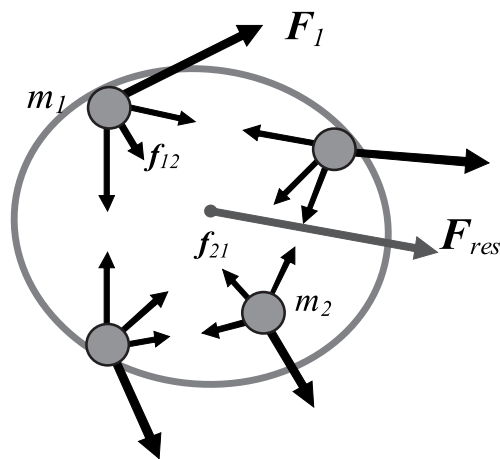


Рис. 4.1 – Система из взаимодействующих материальных точек



Поскольку массы всех частиц считаются неизменными, их можно в (4.1) внести под знак производной. Сложим теперь все уравнения (4.1) нашей системы материальных точек. В силу *третьего закона Ньютона* ( $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ ) все внутренние силы при суммировании сокращаются, и мы получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_i \mathbf{F}_i \rightarrow \frac{d}{dt} (M \mathbf{V}_C) = \mathbf{F}_{res}, \tag{4.2}$$

где  $M = \sum m_i$  — общая масса всей системы,  $\mathbf{F}_{res} = \sum \mathbf{F}_i$  — результирующая сила — векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему, а вектор усредненной скорости  $\mathbf{V}_C$  определен выражением:

$$\mathbf{V}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i}. \tag{4.3}$$



.....  
Здесь проявилось замечательное свойство законов Ньютона — их воспроизводство в больших масштабах.  
.....

Уравнение (4.3) показывает, что произвольная система материальных точек в целом подчиняется второму закону Ньютона, если в качестве массы брать суммарную массу системы, расположенную в точке, координата которой задается радиус-вектором, вычисляемым по формуле:

$$\mathbf{R}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \tag{4.4}$$



.....  
Точка с координатами (4.4) называется **центром инерции** системы материальных точек.  
.....

Система в целом ведет себя как материальная точка с массой  $M$  и координатами  $\mathbf{R}_C$ , движущаяся под действием равнодействующей силы  $\mathbf{F}_{res}$ .



.....  
Если система изолированная, то есть на нее не действуют внешние силы, то центр инерции движется равномерно и прямолинейно, то есть по инерции.  
.....



.....  
В соответствии с первым законом Ньютона, всегда можно выбрать систему отсчета так, чтобы система точек как целое покоилась. Эта система отсчета называется **системой центра инерции** или **C-системой**.  
Система отсчета, связанная с наблюдателем, называется **лабораторной системой** или **L-системой**.  
.....

Поэтому поведение частиц внутри системы точек удобно исследовать именно в  $C$ -системе, когда исключено ее движение как целого, даже если это движение и неравномерное.

## 4.2 Определение положения центра масс у простых тел

Для определения положения центра масс у простых по форме тел можно эффективно использовать следующие правила:

1. Если тело состоит из материальных точек, то, выбирая удобную систему координат, можно определить координаты центра масс непосредственно по формуле (4.4).



.....

Центр масс системы двух материальных точек расположен между ними и лежит на линии, их соединяющей.

.....

Действительно, выбирая ось координат так, чтобы обе точки лежали на ней (см. рис. 4.2), причем одна из точек находится в начале координат, получим с помощью (4.4) координату центра масс  $x_C$ .

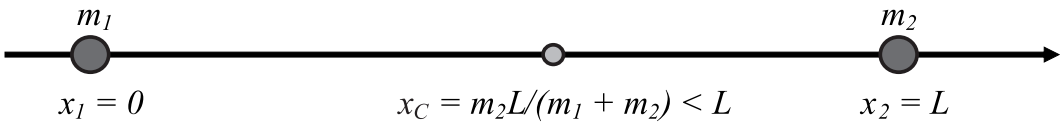
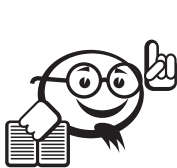


Рис. 4.2 – Центр масс системы двух материальных точек

2. Для симметричных тел имеет место теорема:



.....

Если тело однородное и симметричное, то его центр масс совпадает с центром симметрии.

.....



Рис. 4.3 – Центр масс симметричных тел

3. Если тело можно разбить на части, центр масс которых найти легко, то центр масс всего тела ищем по формуле (4.4), в которую теперь входят координаты и массы отдельных частей.



.....  
Центр масс произвольного однородного треугольника лежит в точке пересечения медиан.  
.....

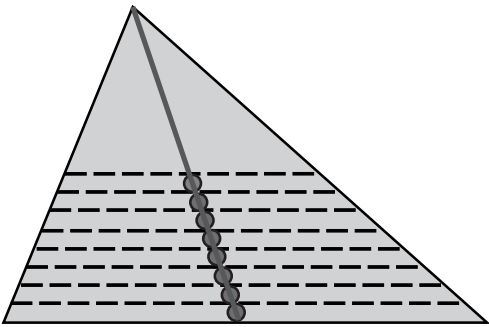


Рис. 4.4 – К определению центра масс треугольника

Действительно, треугольник всегда можно разбить на узкие полоски, расположенные параллельно одной из сторон. Центры масс каждой полоски лежат в их серединах, поэтому и центр масс всех полосок лежит на медиане. Проводя аналогичное разбиение на полоски, параллельные другой стороне треугольника, получим другую медиану. Точка пересечения медиан и будет соответствовать центру масс треугольника.

### 4.3 Импульс тела

Из уравнения (4.2) видно, что в изолированной системе точек векторная сумма  $\sum(m_i v_i)$  сохраняется.



.....  
*Произведение массы материальной точки на ее вектор скорости называется **импульсом**:*  
.....

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

(4.5)

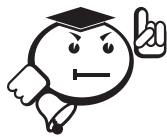
*Для сложного тела или системы материальных точек имеем выражение для импульса:*

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}_C = \sum m_i \mathbf{v}_i.$$

(4.6)



.....  
Импульс тела — это векторная величина, которая сохраняется, если тело изолировано, то есть сумма внешних сил равна нулю. Этот закон сохранения импульса верен при любых изменениях, происходящих внутри системы под действием ее внутренних взаимодействий.  
.....



.....  
Например, если свободно летящий снаряд разорвался на несколько осколков, то центр масс этих осколков будет двигаться так, как будто никакого взрыва не было.  
.....

Наиболее просто закон сохранения импульса проявляется, если тело под действием каких-либо внутренних причин распадается всего на две части. Тогда из закона с достоверностью следует, что в  $C$ -системе импульсы двух частей лежат на одной прямой линии. Именно на этом принципе основано действие реактивного двигателя или явления отдачи при выстреле.



.....  
В  $C$ -системе отсчета полный импульс тела  $P_C$  всегда равен нулю, даже если движение центра масс неравномерное.  
.....

Действительно, если мы перейдем в систему отсчета, движущуюся относительно лабораторной системы со скоростью (4.3), то получим с учетом определения (4.6) для суммарного импульса  $P_C$ :

$$P_C = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_C) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_C \sum_i m_i = 0.$$

### 4.4 Механическая работа и кинетическая энергия

В механике элементарная *работа* определяется как скалярное произведение вектора силы  $\mathbf{F}$  и вектора малого перемещения  $d\mathbf{s}$ :

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cdot \cos \vartheta. \tag{4.7}$$

Докажем теперь теорему о кинетической энергии:

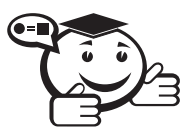


.....  
Работа равнодействующей силы равна изменению *кинетической энергии* тела.  
.....

Для этого умножим скалярно обе части уравнения движения Ньютона (3.1) на вектор перемещения и сделаем в левой части элементарные преобразования:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = dA = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) = d \left( \frac{m v^2}{2} \right). \tag{4.8}$$

Отсюда становится ясным физический смысл производства работы как процесса изменения кинетической энергии тела. Если результирующая сила равна нулю, то кинетическая энергия тела остается постоянной. Это свойство роднит кинетическую энергию и импульс тела, который тоже не меняется в отсутствии внешней силы.



.....  
Такие величины, характеризующие состояние физической системы и сохраняющиеся во времени, называют **интегралами движения**, так как они появляются после однократного интегрирования уравнений движения.  
.....

Импульс и кинетическая энергия материальной точки связаны простым уравнением:

$$E_k = \frac{p^2}{2m}.$$

(4.9)

Если проинтегрировать (4.8), то получим интегральное выражение теоремы для работы при перемещении тела из точки 1 в точку 2:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{k2} - E_{k1} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = A_{12}.$$

(4.10)

Работа математически выражается как интеграл проекции силы на направление перемещения вдоль траектории движения.

Работа может быть как положительной, так и отрицательной. В последнем случае говорят, что система совершает работу против силы, тогда как при  $A > 0$  сила совершает работу над системой.



.....  
Если сила ортогональна перемещению, то она не совершает никакой работы, и кинетическая энергия тела не меняется.  
.....

Вполне очевидно, что работа суммы нескольких сил, действующих на частицу одновременно, равна сумме работ, которые бы совершила каждая сила в отдельности.



.....  
Работа, совершаемая в единицу времени, называется **мощностью**.  
.....

Отметим, что работа — это интегральная величина, а мощность — дифференциальная, то есть мощность имеет смысл даже в одной точке траектории:

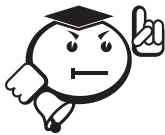
$$N = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

(4.11)

Единицей работы и энергии является *Джоуль*, а мощности *Ватт*. Иногда применяют устаревшую единицу мощности 1 *лошадиная сила* = 736 Вт.

### 4.5 Консервативные силы

Можно выделить так называемые контактные взаимодействия, когда два тела соприкасаются между собой, и взаимодействия посредством силового поля, когда между телами нет других видимых физических тел.



.....  
Это деление весьма условно, так как все известные нам взаимодействия в конечном итоге осуществляются посредством силовых полей, и наоборот, все физические поля современная наука рассматривает как обмен частицами-квантами поля.  
.....

Замечательное свойство всех фундаментальных полей состоит в том, что работа по перемещению частицы из одной точки пространства, где присутствует силовое поле, в другую точку не зависит от траектории перемещения, а определяется исключительно начальной и конечной точками.



.....  
*Силы, работа которых не зависит от траектории перемещения, называют **консервативными силами**.*  
.....

К неконсервативным силам относятся так называемые *диссипативные силы*, к числу которых принадлежит сила трения.



.....  
Легко показать, что работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю. Это свойство может служить также определением консервативной силы.  
.....



.....  
*Часто сила взаимодействия двух материальных точек направлена вдоль линии, соединяющей эти точки. Такие силы называют **центральными силами**.*  
.....

Имеет место следующая теорема (доказательство понятно из рис. 4.5):



.....  
Работа, совершаемая при перемещении частицы в поле центральной силы  $F(r)$ , не зависит от формы траектории и определяется удалением начальной и конечной точек траектории от силового центра  $O$ :

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \tag{4.12}$$

.....

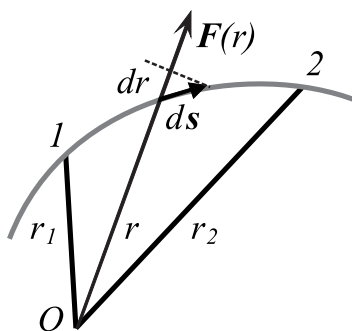


Рис. 4.5 – К расчету работы центральной силы

В формуле (4.12) надо поставить знак «+», если силовой центр отталкивает частицу, и знак «−» в случае притягивающего центра. Поскольку интеграл в (4.12) не зависит от формы траектории, то можно сделать вывод о консерватизме центрального стационарного поля.

Однородное поле можно рассматривать как частный случай центрального поля на большом удалении от силового центра. Поэтому однородное и стационарное силовое поле с необходимостью порождает консервативные силы:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_1^2 d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}_{12} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (4.13)$$

Примером однородного стационарного поля может служить поле силы тяжести в ограниченной области вблизи поверхности Земли:  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ . Согласно вышеприведенному равенству (4.12) работа, совершаемая над частицей силой тяжести, не зависит от формы траектории, а определяется проекцией перемещения на направление действия силы, то есть на вертикаль:

$$A_{12} = mg(h_2 - h_1). \quad (4.14)$$

## 4.6 Потенциальная энергия. Градиент

Для консервативных сил удобно ввести понятие *потенциальной энергии* как некоторой скалярной функции координат точки  $E_p(x, y, z) = E_p(\mathbf{r})$ .

Произвольно выбранной точке  $O$  припишем значение функции  $E_{p0}$ , взятое тоже произвольно. Тогда значение потенциальной энергии в любой другой точке  $E_p(x, y, z)$  положим равной сумме  $E_{p0}$  и работе сил поля по перемещению частицы из точки с выбранными координатами в точку  $O$ :

$$E_p(x, y, z) = E_{p0} + A_{xyz \rightarrow O}. \quad (4.15)$$

Функция  $E_p(x, y, z)$  в этом случае определяется однозначно, так как работа в поле консервативных сил не зависит от траектории, а определяется лишь координатами конечной точки (начальная точка нами зафиксирована). Значение величины  $E_{p0}$  физического смысла не имеет и выбирается из соображений удобства.



.....  
Физический смысл есть только у разности потенциальных энергий двух точек, эта разность равна работе по перемещению частицы из одной точки в другую:

$$A_{12} = E_p(\mathbf{r}_1) - E_p(\mathbf{r}_2). \tag{4.16}$$

В отличие от кинетической, потенциальная энергия может принимать и отрицательные значения.  
.....

Если известно выражение для потенциальной энергии консервативных сил<sup>1</sup>  $U(x,y,z)$ , то можно найти силу  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , действующую на частицу в каждой точке поля.

Пусть частица переместилась только параллельно оси  $x$ . При этом работа сил поля будет равна

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x ds_x = F_x dx = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx \rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогичный расчет можно проделать и для других направлений осей координат. Компоненты вектора силы выражаются через частные производные потенциальной энергии по координатам. Если формально ввести векторный *оператор Гамильтона* следующим образом

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \tag{4.17}$$

то выражение для силы получится как результат действия оператора Гамильтона на скалярную функцию  $U(x,y,z)$ :

$$\mathbf{F} = -\nabla U \equiv -\left(\mathbf{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}\right) \equiv -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{4.18}$$



.....  
*Вектор, полученный таким образом из скалярной функции, называется **градиентом**. Иногда его записывают как  $\text{grad } U$ .*  
.....



.....  
Математическая операция (4.18) — это еще один способ получения векторной величины.  
.....

Вектор градиента дает направление, вдоль которого функция возрастает с наибольшей скоростью. Если потенциальную функцию  $U(x,y,z)$  представлять в виде рельефа местности в поле тяжести, то ориентация вектора градиента укажет

---

<sup>1</sup>Мы здесь и далее используем более традиционное обозначение для потенциальной функции  $U(\mathbf{r})$ .



направление скатывающей силы, действующей на частицу, а его модуль укажет величину тангенса угла наклона поверхности к горизонту в данной точке.



.....  
Консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии ча-  
стицы, взятому с обратным знаком.  
.....

4.7 Закон сохранения механической энергии

Пусть частица движется в поле консервативных сил. При переходе из точки 1 в точку 2 над частицей совершается работа  $A_{12} = E_p(r_1) - E_p(r_2)$ . В соответствии с формулой (4.10) эта работа равна приращению кинетической энергии частицы. Приравняв оба выражения, получим соотношение  $A_{12} = E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1}$ , которое удобно переписать в виде закона сохранения:

$$E = E_{k1} + E_p(r_1) = E_{k2} + E_p(r_2).$$
 (4.19)

Величина  $E$ , равная сумме потенциальной и кинетической энергий, называется полной механической энергией частицы.



.....  
Полная энергия частицы, движущейся в поле консервативных сил,  
остается постоянной.  
.....

Это утверждение выражает закон *сохранения механической энергии* для одной частицы. Кинетическая и потенциальная энергии могут превращаться друг в друга, но если на частицу не действуют никакие другие силы, кроме тех, что описываются потенциальной функцией, то полная энергия частицы остается постоянной.



.....  
Контрольные вопросы по главе 4  
.....

- 1) Как определить положение центра масс треугольной фигуры, сделанной из однородной тонкой проволоки?
- 2) Может ли центр масс некоторого тела располагаться за пределами границ этого тела?
- 3) Почему в механике, описывающей движение протяженных тел, полезно введение понятие центра масс?
- 4) Следствием какого закона Ньютона является закон сохранения импульса?
- 5) Два пушечных ядра движутся с одной и той же поступательной скоростью. Зависит ли импульс летящего ядра от угловой скорости его вращения?

- 6) Как меняется во времени импульс прыгуна в воду с вышки в системе отсчета его собственного центра масс?
- 7) Человек тянет ящик по полу с постоянной скоростью. Совершает ли при этом человек работу? Какую работу совершает равнодействующая сила, приложенная к ящику?
- 8) Почему нельзя ввести понятие потенциальной энергии для силы трения скольжения?
- 9) Две материальные точки взаимодействуют друг с другом так, что потенциальная энергия убывает обратно пропорционально расстоянию между этими точками. Как меняется с расстоянием сила взаимодействия между этими точками? Это сила притяжения или отталкивания?
- 10) В каких случаях можно пользоваться законом сохранения механической энергии?

---

## Глава 5

# СТОЛКНОВЕНИЕ ДВУХ ЧАСТИЦ

---

### 5.1 Внутренняя энергия механической системы

Рассмотрим закон преобразования механической энергии макроскопического тела при переходе от одной системы отсчета к другой. Пусть система отсчета  $K'$  движется относительно системы отсчета  $K$  со скоростью  $V$ , как показано на рис. 5.1.

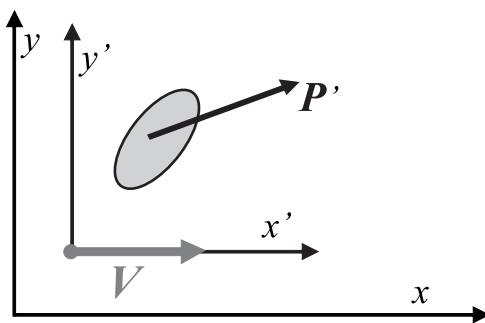


Рис. 5.1 – Переход к движущейся системе отсчета

Тогда скорости частиц тела в этих системах отсчета будут связаны очевидным уравнением  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}$ , и для преобразования механической энергии тела  $E$  получим выражение:

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V})^2 + U = \sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2} + U + \frac{MV^2}{2} + \mathbf{V} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = E' + \frac{MV^2}{2} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}'. \quad (5.1)$$

Здесь  $U$  обозначает полную потенциальную энергию взаимодействия частиц,  $E' = \sum \frac{m_i v_i'^2}{2} + U$  — механическая энергия тела в  $K'$ -системе,  $\mathbf{P}' = \sum m_i \mathbf{v}'_i$  — суммарный импульс тела в  $K'$ -системе, а  $M = \sum m_i$  — суммарная масса тела.



.....  
Для определения механической энергии тела  $E$  в лабораторной системе отсчета нам необходимо знать не только величину энергии  $E'$ , но суммарный импульс  $P'$  тела в системе отсчета, которая движется относительно нас со скоростью  $V$ !  
.....

Если теперь выбрать систему отсчета  $K'$  так, чтобы в ней покоился центр инерции, то есть выбрать  $C$ -систему, в которой собственный импульс  $P' = 0$ , то получим существенно более простую формулу преобразования энергии:

$$E = E' + \frac{MV^2}{2}, \tag{5.2}$$

где  $MV^2/2$  — кинетическая энергия системы как целого в  $K$ -системе, а  $E' = E_C$  — так называемая *внутренняя энергия* в  $C$ -системе, где центр масс покоится. Формула (5.2) иногда называется *формулой Кенига*.

Выбрав специальную систему отсчета —  $C$ -систему, связанную с центром инерции сложной системы материальных точек, мы получаем возможность изучать внутренние изменения в сложной системе без учета движения всей системы материальных точек как целого. Этот момент можно сформулировать в виде теоремы:



.....  
Полная энергия сложного тела в произвольной системе отсчета равняется сумме внутренней энергии тела в  $C$ -системе и кинетической энергии  $MV^2/2$ , которая равна кинетической энергии материальной точки с массой, равной суммарной массе тела.  
.....

## 5.2 Классификация парных столкновений



.....  
**Столкновением** двух тел будем называть такой частный случай их взаимодействия, когда акт взаимодействия ограничен в пространстве и во времени так, что тела до и после акта взаимодействия можно считать движущимися по инерции.  
.....

Столкновение не обязательно означает прямое контактное взаимодействие, это может быть, например, взаимодействие двух заряженных частиц при их сближении и последующем разлете. Важно, чтобы это взаимодействие достаточно быстро ослабевало при удалении частиц друг от друга. Если акт взаимодействия очень краток, то его также называют ударом.



.....  
**Абсолютно упругим ударом** называется такой удар, в котором суммарная кинетическая энергия двух тел сохраняется.  
.....

Это означает, что при таком ударе внутренняя энергия тел не изменяется. Для макроскопических тел, состоящих из большого числа молекул, абсолютно упругий удар является лишь некоторым более или менее хорошим приближением. Для частиц атомных размеров, у которых сравнительно высокие пороги возбуждения внутренних движений, абсолютно упругие удары действительно имеют место.



.....  
*Абсолютно неупругим ударом называется такой удар, после которого оба тела имеют одинаковую скорость (слипаются).*  
.....

Среди ударов принято выделять так называемый *центральный* или *лобовой удар*. При центральном ударе скорости обоих тел как до, так и после столкновения всегда направлены вдоль прямой, соединяющей центры масс этих тел. В этом случае движение обоих тел является одномерным.

5.3 Абсолютно упругий центральный (лобовой) удар

Столкновения можно рассматривать как в *С*-системе, так и в *Л*-системе (лабораторной системе отсчета). Рассмотрим пример центрального удара двух частиц, которые до столкновения имели импульсы  $m_1v_1$  и  $m_2v_2$ . Скорость центра инерции будет равна (см. выражение (4.3))

$$V_C = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}, \tag{5.3}$$

а импульсы обеих частиц в *С*-системе будут равны по модулю и противоположны по направлению:

$$p_{C1} = m_1(v_1 - V_C) = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \mu g = -p_{C2}, \tag{5.4}$$

где величина, имеющая размерность массы:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \tag{5.5}$$

называется *приведенной массой* двух частиц, а  $g = v_1 - v_2$  — это относительная скорость двух частиц.

В случае абсолютно упругого удара вектор импульса обоих частиц в *С*-системе  $\mu g$  не меняется по величине после удара (в силу сохранения кинетической энергии), но меняет свое направление на противоположное. После столкновения для импульсов первой  $p'_{C1}$  и второй  $p'_{C2}$  частиц будем иметь соответственно:

$$p'_{C1} = -p_{C1} = -\frac{m_1m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \quad p'_{C2} = -p_{C2} = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$



.....  
Здесь и ниже мы штрихами отмечаем те величины, которые имеют место после столкновения, а символы без штрихов соответствуют исходным величинам.  
.....

Тогда, переходя к  $L$ -системе, получим для скоростей частиц после столкновения:

$$v'_1 = \frac{p'_{C1}}{m_1} + V_C = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (5.6)$$

$$v'_2 = \frac{p'_{C2}}{m_2} + V_C = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (5.6')$$

Интересный частный случай имеет место при *упругом нецентральной* столкновении частиц равной массы, если первоначально одна из частиц покоилась. Нетрудно видеть, что угол разлета частиц в  $L$ -системе будет всегда прямым, как показано на рис. 5.2.

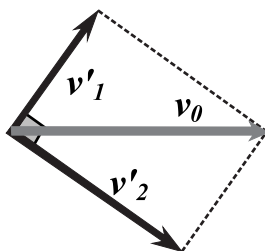


Рис. 5.2 – Столкновение частиц с равной массой

По закону сохранения импульса векторы скоростей частиц равной массы образуют стороны треугольника:  $v_0 = v'_1 + v'_2$ . По закону сохранения кинетической энергии для частиц равной массы можно записать равенство:  $v_0^2 = v'^2_1 + v'^2_2$ . Тогда из теоремы Пифагора следует, что треугольник, составленный из трех векторов скоростей, прямоугольный.

## 5.4 Абсолютно неупругий удар

Опять рассмотрим ситуацию в  $C$ -системе. Полная кинетическая энергия двух частиц в этой системе может быть найдена из выражений для импульсов (5.4):

$$E_{kC} = \frac{p^2_{1C}}{2m_1} + \frac{p^2_{2C}}{2m_2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot \frac{\mu^2 g^2}{2} = \frac{\mu g^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (5.7)$$

Естественно, что вся эта кинетическая энергия при абсолютно неупругом ударе перейдет во внутреннюю энергию сталкивающихся тел, так как суммарный импульс в  $C$ -системе должен оставаться равным нулю!

В лабораторной системе отсчета в соответствии с формулой Кенига (5.2) суммарная кинетическая энергия двух тел до столкновения была равна

$$E_k = E_{kC} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_C^2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (5.8)$$

Кинетическая энергия центра масс двух тел после столкновения останется неизменной, так как в соответствии с законом сохранения импульса суммарный импульс двух тел  $(m_1 + m_2) V_C$  не может измениться в отсутствие внешних сил.

Из формул (5.7) и (5.8) легко найти ту долю  $\eta$  начальной кинетической энергии двух сталкивающихся тел в  $L$ -системе, которая перейдет во внутреннюю энергию при абсолютно неупругом ударе:

$$\eta = \frac{E_{kC}}{E_k} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} = \frac{\mu g^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}. \tag{5.9}$$

В частном случае, когда до столкновения вторая частица покоилась, получаем совсем простое выражение

$$\eta(v_2 = 0) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \tag{5.10}$$

Если налетающая частица будет иметь массу  $m_1 \gg m_2$ , то лишь очень небольшая часть ее кинетической энергии превратится во внутреннюю энергию. Если же абсолютно неупругий удар совершает легкая частица, то практически вся ее кинетическая энергия переходит во внутреннюю энергию.

5.5 Столкновение в С-системе

Как уже было показано, столкновение двух частиц удобнее всего рассматривать, находясь в системе центра масс частиц. В этой системе обе частицы как до, так и после столкновения обладают равными по величине и противоположными по направлению импульсами, как показано на рис. 5.3.

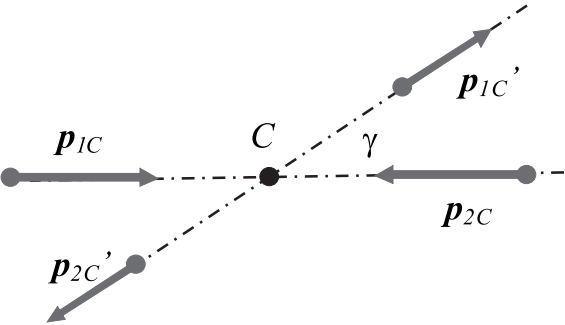


Рис. 5.3 – Столкновение двух частиц в системе центра масс

Отличие упругого удара от неупругого состоит лишь в том, что после неупругого столкновения модули импульсов становятся меньше.

В общем случае нецентрального удара происходит также поворот направления импульсов частиц относительно первоначального движения. Угол поворота  $\gamma$  направления разлета относительно направления до столкновения в  $C$ -системе называется *углом рассеяния*.

5.6 Абсолютно упругий нецентральный удар

Рассмотрим теперь произвольный случай абсолютно упругого столкновения частицы массой  $m$ , налетающей со скоростью  $V$  на покоящуюся частицу  $M$ .

Найдем сначала скорость центра масс двух частиц в  $L$ -системе. По формуле (5.3) получим для этой скорости:

$$V_C = \frac{m}{m+M} V. \quad (5.11)$$

Обратим внимание на то, что скорость центра масс  $V_C$  будет всегда меньше скорости налетающей частицы, которая в данном примере является также относительной скоростью сближения двух частиц  $g = V$ .

В общем случае скорость налетающей частицы в системе центра масс  $v_C$  может быть как больше, так и меньше скорости самого центра масс  $V_C$ . Скорость налетающей частицы в  $C$ -системе  $v_C$  можно найти из выражения для импульса частицы в  $C$ -системе:

$$p_C = \mu g = \frac{mM}{m+M} V = m \frac{M}{m+M} V = m v_C. \quad (5.12)$$

Тогда отношение двух скоростей можно найти из (5.11) и (5.12):

$$\frac{V_C}{v_C} = \frac{m}{M}. \quad (5.13)$$

Теперь заметим, что модуль скорости налетающей частицы в  $C$ -системе  $v_C$  не может измениться при абсолютно упругом ударе, так как это противоречит закону сохранения энергии. Но направление этой скорости может измениться на угол рассеяния  $\gamma$ , если удар не центральный. Поэтому при различных углах рассеяния вектор скорости  $v_C$  всегда будет лежать на поверхности некоторой сферы, центр которой совпадает с местом столкновения.

Удобную форму анализа нецентральных столкновений в виде диаграмм предложил Ландау. На рисунке 5.4 показаны два примера анализа столкновения: слева случай, когда налетающая частица более массивная, чем покоящаяся, а справа обратная ситуация, когда  $m < M$ . Жирная стрелка — это вектор  $V_C$ , тонкая горизонтальная стрелка — это вектор скорости налетающей частицы в  $L$ -системе  $V$ , наклонная стрелка — это вектор скорости налетающей частицы после столкновения в  $L$ -системе  $V'$ , радиальная стрелка — это вектор скорости налетающей частицы в  $C$ -системе  $v'_C$  после ее рассеяния на угол  $\gamma$ .

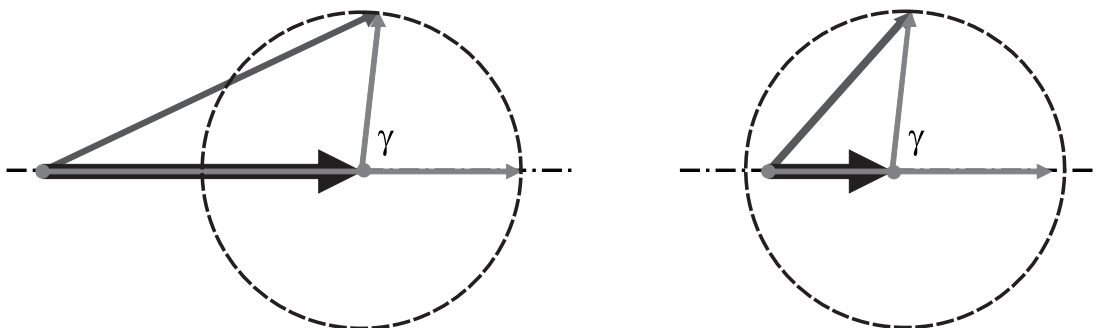


Рис. 5.4 – Диаграммы Ландау для упругого нецентрального удара

Из диаграммы слева видно, что вектор скорости тяжелой частицы после столкновения с покоящейся легкой частицей может развернуться в  $L$ -системе лишь на острый угол, меньший чем  $\arcsin(m/M)$ .



Из диаграммы справа следует, что рассеяние легкой частицы на покоящейся и более тяжелой частице может происходить на любой угол в  $L$ -системе: как острый, так и тупой.



Контрольные вопросы по главе 5

- 1) Может ли внутренняя энергия тела превышать кинетическую энергию поступательного движения тела как целого?
- 2) По ровной горизонтальной поверхности без проскальзывания катится обруч. В каком отношении друг к другу находятся внутренняя энергия обруча и кинетическая энергия центра масс обруча?
- 3) Чем отличается абсолютно неупругий удар от просто неупругого удара?
- 4) Человек запрыгивает на подножку движущегося поезда. К какому типу столкновений относится этот случай?
- 5) Может ли относительная скорость двух частиц точно равняться скорости их центра масс?
- 6) При каком условии относительная скорость двух одинаковых по массе частиц всегда ортогональна скорости движения их центра масс?

---

# Глава 6

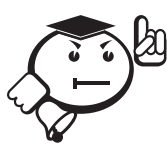
## МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

---

### 6.1 Закон Паскаля

В отличие от твердых тел, которые сохраняют свою форму при внешних воздействиях, жидкость представляет собой подвижную материальную субстанцию, которая легко изменяет свою форму. Это связано с тем, что молекулы жидкого вещества способны свободно проскальзывать друг относительно друга при малейшем усилии. Для описания жидкости удобно ввести удельную характеристику ее массы — *плотность жидкости*  $\rho$ : отношение массы жидкости к занимаемому ею объему.

В данном разделе мы будем полагать жидкость *несжимаемой*, то есть при всех перемещениях она будет сохранять свою плотность. Реальные жидкости, конечно же, поддаются сжатию, но при не слишком высоких давлениях изменение плотности жидкостей  $\rho$  можно не учитывать.



.....  
Хорошей моделью несжимаемой жидкости является большое количество твердых и гладких шариков (например, дробинок) в коробке или мешке, которые сохраняют свой объем, но свободно могут перемещаться друг относительно друга. Если шарики пересыпать из одной коробки в другую, то они всегда будут принимать форму сосуда, как бы «растекаясь» по нему. Но, благодаря высокой твердости самих шариков, их общий объем не удастся уменьшить, прикладывая даже большую силу.  
.....

Из такой модели жидкого состояния легко понять еще одно специфическое свойство жидкости: если жидкость в каком-либо замкнутом сосуде сжимать, то избыточное давление передается во все стороны равномерно. Другими словами, на любую поверхность  $\Delta S$ , помещенную в жидкость, находящуюся под давлением  $P$ , будет действовать сила  $\Delta F$ , ортогональная поверхности:

$$\Delta F = P \cdot \Delta S. \tag{6.1}$$

Это утверждение известно как *закон Паскаля*: сила давления в жидкости передается равномерно во все стороны (изотропно), как показано на рис. 6.1.

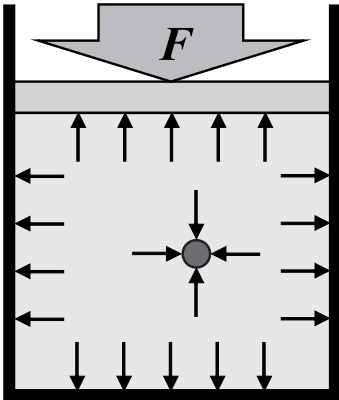


Рис. 6.1 – При сжатии жидкости сила давления изотропна

## 6.2 Гидростатическое давление. Сила Архимеда

Если жидкость в сосуде находится в поле силы тяжести, то вес жидкости сам создает избыточное давление в ней. Нетрудно рассчитать давление  $P$  столба жидкости высотой  $H$ : это вес жидкости, отнесенный к площади основания столба:

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{Mg}{\Delta S} = \frac{\rho \Delta V g}{\Delta S} = \frac{\rho H \Delta S g}{\Delta S} = \rho g H. \tag{6.2}$$

Из (6.2) следует, что давление на различной глубине будет также различным. Поэтому на протяженное по вертикали твердое тело, погруженное в жидкость, будет действовать выталкивающая сила со стороны жидкости. Эта сила называется *силой Архимеда*.

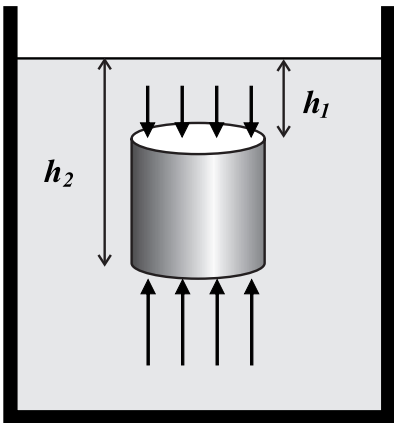


Рис. 6.2 – К расчету выталкивающей силы Архимеда

Величину этой силы для тела цилиндрической формы легко рассчитать, определяя разность сил давления на нижнюю и верхнюю плоскости (см. рис. 6.2):

$$F_A = \rho gh_2\Delta S - \rho gh_1\Delta S = \rho g (h_2 - h_1) \Delta S = \rho gV. \tag{6.3}$$



.....  
Выталкивающая сила Архимеда равна по модулю весу жидкости, которая бы занимала объем, равный объему погруженного тела (или его части). Если тело имеет даже неправильную форму, то это правило остается в силе.  
.....



.....  
Надо понимать, что реальная природа выталкивающей силы состоит в разности давлений столба жидкости на верхнюю и нижнюю части погруженного тела. Если какая-либо компонента сил давления отсутствует, то выталкивающая сила будет отличаться от (6.2).  
.....

Например, на цилиндрическое тело, плотно прилегающее к плоскому дну, вообще не будет действовать выталкивающая сила. Давление столба жидкости на верхнюю плоскость останется, а на нижнюю плоскость выталкивающая сила действовать не будет, так как жидкость не проникает под нее.

### 6.3 Стационарное течение идеальной жидкости

Рассмотрим теперь движущуюся жидкость. В этом случае течение жидкости описывается заданием *поля скоростей*, когда каждой точке пространства приписывается конкретный вектор скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  частиц жидкости. Это поле можно наглядно изобразить с помощью *линий тока*, которые при стационарном течении совпадают с траекториями движения частиц жидкости. Если через все точки небольшого замкнутого контура провести линии тока, то образуется поверхность (на рисунке 6.3 трубка тока выделена штриховкой), которую называют *трубкой тока*. Вектор  $\mathbf{v}$  касается поверхности трубки в каждой ее точке.

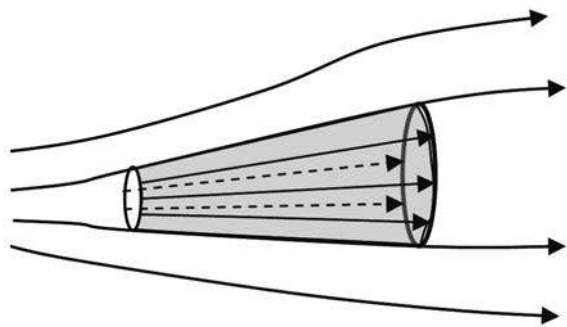


Рис. 6.3 – Трубка и линии тока жидкости

Возьмем трубку тока, достаточно тонкую для того, чтобы во всех точках ее поперечного сечения  $S$  скорость частиц  $v$  была бы одна и та же. При *стационарном течении* трубка тока подобна стенкам жесткой трубы. Поэтому через сечение  $S$  пройдет за время  $\Delta t$  объем жидкости  $\Delta V$ , равный  $Sv\Delta t$ :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Sv. \tag{6.4}$$

Для несжимаемой жидкости объемы, протекающие в единицу времени через любые сечения выбранной трубки тока, должны быть одинаковы:

$$Sv = \text{const}. \tag{6.5}$$

Это равенство выражает неразрывность струи несжимаемой жидкости.  
В *реальных жидкостях* при перемещении слоев жидкости друг относительно друга возникают диссипативные силы *внутреннего трения*.



.....  
Воображаемая жидкость, у которой внутреннее трение полностью отсутствует, называется *идеальной*.  
.....

Течение идеальной жидкости не сопровождается потерей механической энергии. Закон сохранения механической энергии позволяет дать довольно простой вывод известного *уравнения Бернулли* для стационарного течения несжимаемой жидкости.

Выделим, как показано на рис. 6.4, объем жидкости, ограниченный стенками узкой трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . За время  $\Delta t$  этот объем сместится вдоль трубки тока, причем граница 1 объема получит перемещение  $\Delta l_1$ , а граница 2 — перемещение  $\Delta l_2$ .

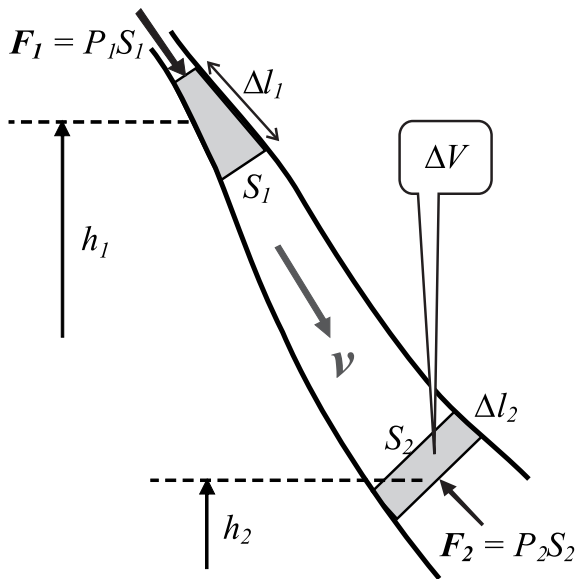


Рис. 6.4 – К выводу уравнения Бернулли

Работа  $A$ , совершаемая при этом силами давления, равна приращению полной механической энергии, заключенной в рассматриваемом объеме жидкости. Силы давления на боковые «стенки» трубки тока перпендикулярны в каждой точке к вектору перемещения жидкости и поэтому работы не совершают. Отлична от нуля будет лишь работа сил давления (указаны на рисунке красными стрелками), приложенных к сечениям  $S_1$  и  $S_2$ :

$$A = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2 = (P_1 - P_2) \Delta V. \tag{6.6}$$

Полная энергия рассматриваемого объема жидкости складывается из кинетической и потенциальной энергии в поле земного тяготения. Вследствие стационарности течения полная энергия не заштрихованной части жидкости не меняется. Поэтому приращение полной энергии равно разности значений полной энергии только заштрихованных объемов, масса которых одинакова в силу несжимаемости жидкости:  $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ .

Возьмем сечение трубки тока настолько малым, чтобы всем точкам заштрихованного объема можно было приписать одно и то же значение скорости  $v$ , давления  $P$  и высоты  $h$ . Тогда, приравняв приращение энергии и совершенной работы (6.6), получим:

$$\begin{aligned} \Delta E_2 - \Delta E_1 &= \left( \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) \Delta V - \left( \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right) \Delta V = A = (P_1 - P_2) \Delta V, \\ \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2 &= \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Это уравнение становится строгим лишь при стремлении поперечного сечения  $S$  к нулю. Следовательно, величины скорости, давления и высоты нужно рассматривать как относящиеся к одной линии тока. Уравнение (6.7) называется *уравнением (теоремой) Бернулли*:



.....  
При течении идеальной жидкости сумма кинетической и потенциальной энергии выделенного объема вещества сохраняется.  
.....



.....  
Отметим, что давление — это одна из форм потенциальной энергии (энергия упругой деформации среды).  
.....

### 6.4 Примеры использования уравнения Бернулли

Рассмотрим один из способов измерения скорости жидкости (или газа), в котором используется уравнение Бернулли.

Если заполнить трубку, имеющую коленообразную форму, жидкостью с плотностью  $\rho_1$ , то получится прибор, называемый дифференциальным манометром

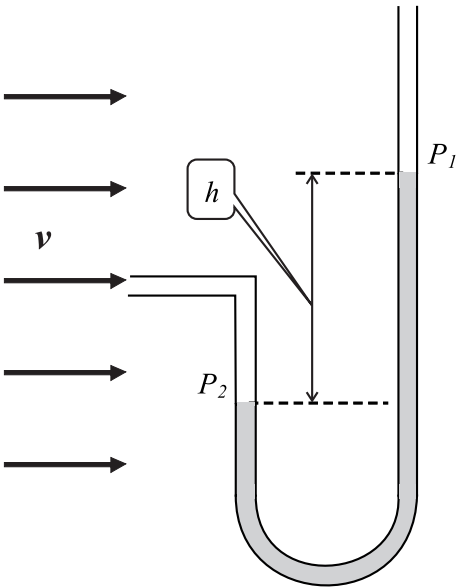


Рис. 6.5 – Схема измерения скорости потока дифференциальным манометром

(рис. 6.5). Разность уровней жидкости  $h$  в различных частях колена будет пропорциональна разности давлений  $\Delta P$  в обоих коленах трубки.

В левом колене за счет кинетической энергии набегающего потока воздуха, плотность которого  $\rho_0$ , над поверхностью жидкости создается давление:

$$P_2 = P_1 + \frac{\rho v^2}{2},$$

а в правом колене давление над поверхностью жидкости  $P_1$  равно атмосферному. Поэтому разность давлений в обоих коленах приводит к перетеканию жидкости в правое колено. Это перетекание прекратится, когда давление столба жидкости уравнивает разницу давления воздуха:

$$\rho_1 g h = \frac{\rho_0 v^2}{2} \rightarrow h = \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Уравнение (6.7) может быть использовано для вывода формулы Торричелли для скорости истечения жидкости из широкого сосуда под действием силы тяжести:

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{6.8}$$

Вывод этой формулы легко получить, записав уравнение (6.7) применительно к линии тока, которая показана на рисунке 6.6 искривленной стрелкой.

В начале этой линии скорость жидкости близка к нулю (сосуд по определению широкий), а давление равно атмосферному  $P_0$ . У среза отверстия давление также атмосферное, но высота «отрицательная»  $= -h$ . В итоге имеем:

$$P_0 = \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h + P_0.$$

Отсюда и получаем выражение (6.8) для скорости вытекающей струи.

Как видим, закон сохранения энергии для жидкости дает ту же скорость, что и для скорости материальной точки, свободно падающей с высоты  $h$  под действием силы тяжести.

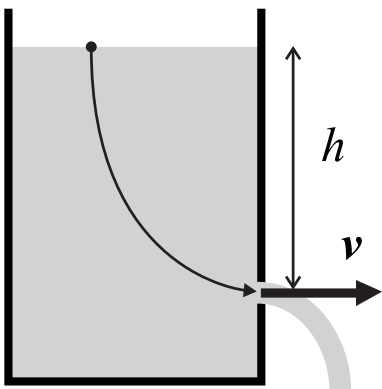


Рис. 6.6 – К выводу формулы Торричелли

6.5 Вязкое трение

Рассмотрим теперь диссипативные силы, возникающие при движении тел в жидкостях.



.....  
Любая сколь угодно малая сила вызывает движение тела в жидкости.  
.....

Отсутствие в жидкости трения покоя на практике используется для снижения потерь на трение скольжения в виде смазки трущихся поверхностей. Фактически происходит замена сухого трения на вязкое, что значительно снижает эффективный коэффициент трения. Именно наличием тонкого (иногда всего в несколько молекулярных слоев) слоя жидкости обусловлено низкое трение металлов по льду. Кроме того, смазка разъединяет твердые поверхности и значительно уменьшает изнашиваемость деталей.

Густые жидкости движутся менее легко, чем, например, вода или воздух. Мерой легкости, с которой вызывается течение жидкости, является ее *вязкость*. Вязкость можно измерить при параллельном перемещении одной плоскости, помещенной в жидкость, относительно другой (см. рисунок 6.7).

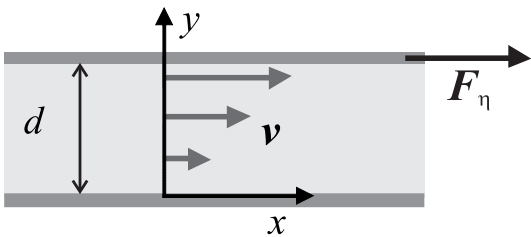


Рис. 6.7 – Распределение поля скоростей в слое жидкости при движении одной плоской поверхности относительно другой

Опыт показывает, что сила, необходимая для равномерного перемещения верхней пластины площадью  $S$  со скоростью  $v$  относительно нижней, пропорциональна поперечному градиенту скорости и площади поверхности, а коэффициент пропорциональности  $\eta$  называется *коэффициентом вязкости* или просто вязкостью:



$$F_{\eta} = \frac{\eta S V}{d} = \eta S \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (6.9)$$

Эту формулу впервые обосновал Ньютон. Естественно, что такая же по величине сила действует и между слоями жидкости, движущимися друг относительно друга.

Другими словами, диссипация кинетической энергии жидкости происходит, если есть взаимное перемещение ее молекул, причем в отличие от сухого трения диссипативная сила в жидкости линейно зависит от градиента скорости при взаимном перемещении. Величина коэффициента вязкости  $\eta$  определяется молекулярным строением жидкости (или газа), внешними условиями (давление, температура) и может меняться в довольно широких пределах. В системе СИ коэффициент вязкости принято измерять в Па·с.

## 6.6 Течение вязкой жидкости по трубе

Посмотрим, как влияет вязкость жидкости при ее протекании по цилиндрической трубе. При медленном течении скорость течения меняется от нуля вблизи стенки трубы до максимального значения на оси трубы. Жидкость при этом оказывается как бы разделенной на тонкие цилиндрические слои, которые скользят относительно друг друга, не перемешиваясь. Такое течение называется *ламинарным* или *слоистым*. Естественно, что для поддержания такого движения вязкой жидкости требуется разность давлений на концах трубы. В установившемся течении, когда скорость не меняется со временем, движущая сила должна компенсироваться силой вязкого трения.

Выделим, как показано на рис. 6.8, в трубе с внутренним радиусом  $R$  цилиндр радиуса  $r$  и длиной  $L$ .

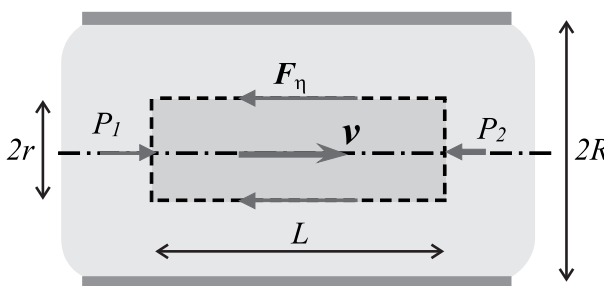


Рис. 6.8 – Силы, действующие на выделенный объем, при течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе

Тогда можно записать уравнение равновесия сил, действующих на выделенный объем жидкости:

$$(P_1 - P_2) \pi r^2 = -\eta \cdot 2\pi r L \cdot \frac{dv}{dr},$$

интегрирование которого дает

$$v(r) = -\frac{(P_1 - P_2) r^2}{4\eta L} + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  легко найти из условия  $v(R) = 0$ . В результате получим закон распределения скорости ламинарного течения по радиусу трубы:

$$v(r) = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (6.10)$$

Скорость ламинарного течения на оси трубы пропорциональна квадрату ее радиуса. Проинтегрировав (6.10) по радиусу, можно найти объем жидкости, протекающий через трубу в единицу времени:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2). \quad (6.11)$$

Это известная *формула Пуазейля* для объемной скорости потока вязкой жидкости в трубе круглого сечения.

## 6.7 Турбулентное течение. Число Рейнольдса

До сих пор мы подчеркивали, что течение жидкости или газа достаточно медленное, чтобы можно было считать его ламинарным и стационарным. При возрастании скорости течения в какой-то момент картина течения резко меняется. В жидкости появляются завихрения, которые беспорядочно перемещаются в жидкости. Течение перестает быть стационарным, такое течение называется *турбулентным*, и жидкость интенсивно перемешивается. Это пример, когда без видимых причин (уравнения движения жидкости остаются теми же) происходит *хаотизация* системы.

Поскольку при турбулентном течении скорость в каждой точке все время меняется, то можно говорить лишь о среднем по времени значении скорости в данной точке. Значит, и понятие линий тока уже не соответствует прежнему, формула Пуазейля (6.11) теряет силу для турбулентного течения.

Английский ученый Рейнольдс в XIX веке установил, что характер течения определяется безразмерным числом, которое получило его имя:

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (6.12)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $v$  — средняя по сечению потока скорость течения, а  $l$  — характерный поперечный размер потока (или тела в неограниченном потоке). При малых числах Рейнольдса течение носит ламинарный характер. Начиная с некоторого значения  $\mathbf{Re}$ , называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Так, для цилиндрической трубы, если в качестве характерного размера  $l$  взять радиус сечения, критическое значение  $\mathbf{Re} \cong 1000$ .

Кроме того, *число Рейнольдса* служит критерием подобия для течения жидкости и газа в трубах, каналах, при обтекании тел. Это означает, что протекание разных жидкостей в трубах одной формы, но разного размера при различных скоростях будет носить совершенно одинаковый характер, если у этих течений будет одинаковое число Рейнольдса. Этот замечательный факт позволяет проводить эффективное моделирование поведения больших объектов на сравнительно малых моделях.

## 6.8 Силы сопротивления при движении тел в вязкой жидкости

Тела, движущиеся в вязкой жидкости, всегда испытывают действие сил с ее стороны. Вектор силы сопротивления всегда можно разложить на две составляющие: проекция силы, направленная параллельно скорости движения невозмущенного потока  $F_{\parallel v}$ , называется *лобовым сопротивлением*, а перпендикулярная ей проекция  $F_{\perp v}$  называется *подъемной силой*.

Идеальная жидкость не создает никакого лобового сопротивления. В вязкой же жидкости вблизи поверхности обтекаемого тела образуется *пограничный слой*, в котором жидкость как бы прилипает к телу и не движется. В этом слое возникают большие поперечные градиенты скорости, которые и вызывают появление лобового сопротивления.

Но влияние вязкости не исчерпывается возникновением сил трения. Наличие пограничного слоя в корне меняет характер обтекания тела жидкостью. При сравнительно больших скоростях полное обтекание становится невозможным, поток отрывается от поверхности тела, в результате чего позади него возникают вихри. Давление в образуемой за телом вихревой области оказывается пониженным (вспомним теорему Бернулли), вследствие чего возникает разность давлений, то есть еще одна причина лобового сопротивления. При увеличении скорости набегающего потока вихри отрываются от тела окончательно, уносятся потоком и постепенно затухают вследствие внутреннего трения. Энергия вихрей рассеивается в виде тепла. Снизить лобовое сопротивление можно, изготовив тело такой формы, чтобы область образования вихрей была минимальной или совсем исчезла при требуемых скоростях движения. Соотношение между лобовым сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется опять же числом Рейнольдса. При малых **Re** преобладают силы вязкого трения, при больших — силы давления.

Стокс установил, что при небольших **Re**, когда существенно только вязкое трение, модуль силы сопротивления  $F_S$  при движении твердого шара радиуса  $R$  равен:

$$F_S = 6\pi\eta v R. \tag{6.13}$$

Это *формула Стокса*, которая справедлива, когда расстояние от тела до границ жидкости много больше размеров тела. Эту формулу часто используют для измерения коэффициента вязкости путем наблюдения за движением маленьких шариков в жидкости под действием силы тяжести.



### Контрольные вопросы по главе 6

- 1) В чем состоит основная причина малой сжимаемости жидкостей по сравнению с газами?
- 2) Некоторое тело плавает в жидкости, погрузившись в нее наполовину своего объема. Как изменится глубина погружения, если сила тяготения уменьшится в 2 раза?

- 3) В небольшом корыте с водой плавает таз, на дне которого лежит массивный стальной брусок. Как изменится уровень воды в корыте, если брусок из таза переложить в корыто?
- 4) В чем основное различие идеальной жидкости от реальных?
- 5) Следствием какого физического закона является уравнение Бернулли для идеальной жидкости?
- 6) Назовите основные отличия в свойствах сухого и вязкого трения?
- 7) При каких условиях можно пользоваться формулой Пуазейля для расхода жидкости при ее течении по круглой трубе?
- 8) Какое течение называют ламинарным?
- 9) Всегда ли вихревое течение жидкости должно считаться турбулентным или имеются какие-то исключения? Приведите примеры.

---

# Глава 7

## УПРУГИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

---

### 7.1 Напряжение и деформация

Кратко рассмотрим еще один вид консервативных сил — силы упругости. Эти силы возникают в результате деформации среды при внешнем воздействии. Хотя упругие силы свойственны всем агрегатным состояниям, мы ограничимся здесь только твердым телом, то есть телом, сохраняющим форму свободной границы.



.....  
*Под **деформацией** среды мы понимаем здесь любое изменение формы и размеров выделенного объема среды, возникающее под воздействием приложенных к этому объему сил.*  
.....

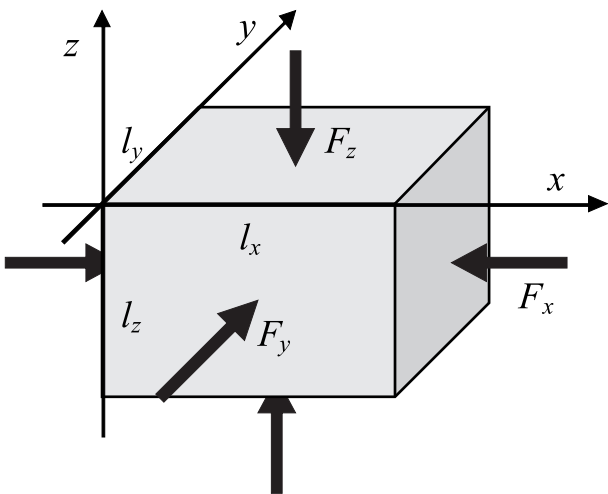


Рис. 7.1 – Определение объемной деформации и напряжения

Принято характеризовать деформацию *растяжения* и *сжатия* безразмерной величиной  $\lambda$  (ее, собственно, и называют деформацией) — относительным изменением размеров выделенного прямоугольного параллелепипеда  $V = l_x \cdot l_y \cdot l_z$  вдоль соответствующих координатных направлений (см. рисунок 7.1):

$$\lambda_x = \frac{\Delta l_x}{l_x}, \quad \lambda_y = \frac{\Delta l_y}{l_y}, \quad \lambda_z = \frac{\Delta l_z}{l_z}. \quad (7.1)$$

Если деформация среды неоднородна, то есть зависит от координаты точки среды, то выделенный объем должен иметь достаточно малые размеры. Для простоты мы будем рассматривать только однородную деформацию.

Естественно и силовое воздействие на выделенный объем характеризовать удельной величиной — отношением соответствующей проекции вектора силы (см. рисунок) к площади воздействия. Эта величина  $s$ , имеющая размерность давления, в теории упругости называется *напряжением*:

$$s_x = \frac{F_x}{l_y l_z} = \frac{F_x}{A_x}, \quad s_y = \frac{F_y}{l_x l_z} = \frac{F_y}{A_y}, \quad s_z = \frac{F_z}{l_x l_y} = \frac{F_z}{A_z}, \quad (7.2)$$

где напряжение обозначено буквой  $s$ , чтобы не отождествлять его с изотропным давлением в газе или жидкости, а площадь грани, перпендикулярной соответствующему координатному направлению, мы обозначили буквой  $A$ .

Удобно считать напряжение сжатия отрицательной, а напряжение растяжения — положительной величиной, так как в этом случае знаки напряжения и деформации будут совпадать.

Для каждого вещества можно снять экспериментальную зависимость деформации, например при растяжении однородного стержня от приложенного напряжения. В результате получим так называемую *кривую деформации* материала на растяжение. На рисунке 7.2 схематично показана полученная таким образом типичная кривая деформации.

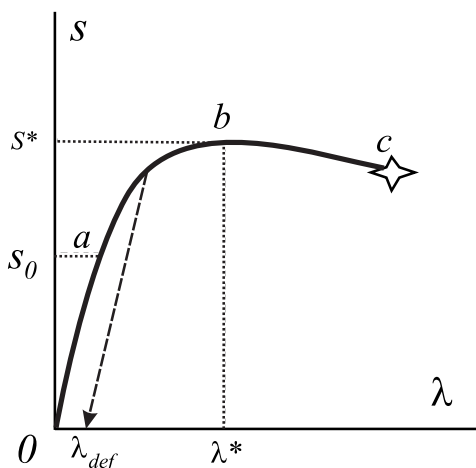


Рис. 7.2 — Типичная зависимость напряжения от деформации материала

Эта зависимость имеет несколько характерных участков: линейный участок упругой деформации  $0a$ , нелинейный участок пластической деформации  $ab$ , заканчивающийся точкой  $b$  — пределом текучести материала, участок  $bc$ , заканчивающийся точкой разрушения материала.

Деформация в пределах линейного участка является обратимой: при снятии напряжения деформация материала обращается в 0. Если же начинать снижать напряжение с точки на участке пластической деформации *ab*, то даже после полного снятия напряжения (штриховая линия) у материала сохранится остаточная деформация  $\lambda_{def}$ .

У каждого материала имеется предельная прочность  $s^*$  и соответствующая ей предельная деформация  $\lambda^*$ , причем последняя у большинства веществ не превышает нескольких процентов. Исключение составляют упругие среды вроде каучука, некоторые сорта пластмасс и т. п. — у них предельная деформация может достигать десятков и даже сотен процентов.

## 7.2 Закон Гука. Модуль Юнга и отношение Пуассона

Если деформация обратима, то есть является упругой, то силы упругости с высокой точностью пропорциональны величине деформации. В этом состоит *закон Гука*. Опыт показывает, что любые достаточно малые деформации являются упругими. Просто для различных тел эта степень малости различна. Обратимость упругих деформаций говорит об отсутствии диссипации энергии в этом процессе. Строго говоря, абсолютно упругих деформаций нет, но часто такое приближение оказывается очень хорошим при описании реальных процессов.

Упругие свойства твердого изотропного материала можно характеризовать всего двумя постоянными параметрами: модулем Юнга и отношением Пуассона. Почти все встречающиеся в строительной практике металлы и керамика имеют поликристаллическую структуру и в среднем изотропны. Из природных материалов сильную анизотропию имеет древесина.

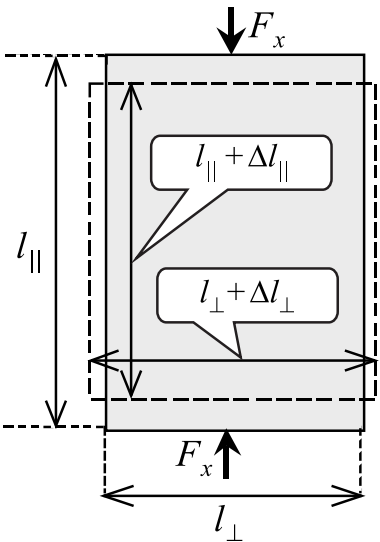


Рис. 7.3 – Одномерная деформация сжатия образца

На примере деформации изотропного параллелепипеда, показанной на рисунке 7.3, введем упомянутые две характеристики материала — *модуль Юнга*  $E$  и *отношение Пуассона*  $\mu$ :

$$E\lambda_{\parallel} = E\frac{\Delta l_{\parallel}}{l_{\parallel}} = s_x = \frac{F_x}{A_x}, \tag{7.3}$$

$$\lambda_{\perp} = \frac{\Delta l_{\perp}}{l_{\perp}} = -\mu\lambda_{\parallel}. \tag{7.4}$$

Знак минус в уравнении (7.4) введен для того, чтобы отношение Пуассона  $\mu$  было положительным.

Как видно, при сжатии образца вдоль какого-то направления происходит его «расширение» вдоль перпендикулярного направления, и наоборот, при растяжении вдоль какого-то направления происходит сжатие в поперечном направлении.

В общем случае при одностороннем сжатии-растяжении объем твердого тела не сохраняется, а именно: имеем из (7.3) и (7.4) для относительной объемной деформации  $\lambda_V$  при одностороннем сжатии:

$$\lambda_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{l_y l_z \Delta l_x + l_x l_z \Delta l_y + l_x l_y \Delta l_z}{l_x l_y l_z} = \frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta l_y}{l_y} + \frac{\Delta l_z}{l_z} = \lambda_{\parallel} + 2\lambda_{\perp} = s_x \frac{1 - 2\mu}{E}. \tag{7.5}$$

Объем будет сохраняться лишь при условии  $\mu = 1/2$ . Это математическое условие несжимаемости изотропного материала.

Модуль Юнга имеет размерность давления, а отношение Пуассона безразмерно.

### 7.3 Энергия упругой деформации среды

Деформируемая среда запасает в себе упругую энергию. Выражение для плотности упругой энергии  $w$  легко получить, поделив затраченную работу на объем деформируемой среды

$$w = \frac{\int_0^{\Delta l} s(\lambda) \cdot A \, dl}{Al} = \int_0^{\lambda} s(\lambda) \, d\lambda = \frac{E\lambda^2}{2} = \frac{s^2}{2E} = \frac{s(\lambda)\lambda}{2}. \tag{7.6}$$

Полученные выражения (7.6) для плотности упругой энергии являются верными и для произвольных деформаций типа «растяжение-сжатие», включая и неоднородные, когда напряжения и деформации зависят от координат точки.

### 7.4 Всестороннее сжатие

Выразим теперь через введенные константы другие модули упругости материала, которые характеризуют деформируемость вещества при одновременном воздействии нескольких напряжений.



.....  
При малых деформациях, когда выполняется закон Гука, имеет место *принцип суперпозиции*: одновременное действие нескольких напряжений в результате дает такую деформацию, которая получается как сумма деформаций от каждого напряжения в отдельности, как если бы они действовали независимо.  
.....



Рассмотрим сжатие того же параллелепипеда, когда каждая его грань подвергается одинаковому сжимающему напряжению. Это может иметь место, например, когда тело со всех сторон подвергается давлению жидкости, для которой справедлив закон Паскаля. Тогда механическое напряжение сжатия просто равно давлению жидкости  $P$ . Деформация, например, вдоль оси  $Ox$   $\lambda_x$ , будет результатом сложения трех компонент — от одной продольной составляющей напряжения  $\lambda_x^x$  и от двух поперечных напряжений  $\lambda_x^y$  и  $\lambda_x^z$ :

$$\lambda_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \lambda_x^x + \lambda_x^y + \lambda_x^z = -\frac{P}{E} - 2\mu \left( -\frac{P}{E} \right) = -(1 - 2\mu) \frac{P}{E}.$$

Объемная деформация  $\lambda_V = \Delta V/V$  в итоге сложится из трех деформаций, как это показано в (7.5), а связь между гидростатическим давлением  $P$  и объемной деформацией  $\lambda_V$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \lambda_V = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z &= -3(1 - 2\mu) \frac{P}{E}, \\ P &= -\frac{\lambda_V E}{3(1 - 2\mu)}, \quad E_V = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Коэффициент пропорциональности  $E_V$ , стоящий в этой формуле, называется объемным модулем упругости. Иногда в справочниках для конструкционных материалов приводят именно его значение.

Из (7.7) видно, что отношение Пуассона никогда не может быть больше, чем  $1/2$ , иначе стало бы возможным расширение тел при всесторонних сжимающих нагрузках.

## 7.5 Деформация сжатия закрепленного стержня

В случае сжатия закрепленного в жесткой оправе упругого стержня его поперечные размеры не должны изменяться. Но это возможно только, если к боковым граням приложить вполне определенное поперечное сжимающее напряжение. Это напряжение создается силами реакции жестких стенок, которые можно найти из условия неизменности поперечных размеров образца. На рисунке 7.4. показана эта ситуация.

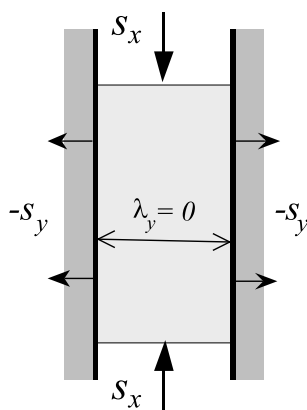


Рис. 7.4 – Сжатие ограниченного стенками стержня

Обозначим возникающие поперечные напряжения  $s_z$  и  $s_y$ , а внешнее сжимающее напряжение как  $s_x$ . Тогда выпишем выражения для деформаций вдоль каждого направления. Они опять складываются из трех компонент:

$$\lambda_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{s_x - \mu (s_y + s_z)}{E}, \tag{7.8}$$

$$\lambda_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{s_y - \mu (s_x + s_z)}{E}, \tag{7.8'}$$

$$\lambda_z = \frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{s_z - \mu (s_x + s_y)}{E}. \tag{7.8''}$$

Но по условию задачи тело вдоль поперечных направлений свои размеры не меняет, и поэтому  $\lambda_y = \lambda_z = 0$ . Решая совместно эти два уравнения с учетом (7.8') и (7.8''), найдем величину боковых напряжений со стороны стенок:

$$s_y = s_z = s_x \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Подставляя этот результат в уравнение (7.8) для  $\lambda_x$ , получаем окончательно

$$\lambda_x = \frac{s_x}{E} \left\{ 1 - \frac{2\mu^2}{1 - \mu} \right\} = \frac{s_x}{E} \cdot \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu}.$$

Когда боковые стороны деформируемого тела удерживаются, его эффективный модуль упругости  $E_{V1}$  существенно повышается:

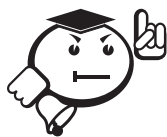
$$s_x = E \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \lambda_x, \quad E_{V1} = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \tag{7.9}$$

то есть материал, способный деформироваться только в одном направлении, становится жестче по сравнению с тем же материалом, но со свободными границами. Естественно, что и плотность упругой энергии, даваемая выражением (7.6), в этом случае определяется соответствующим модулем  $E_{V1}$ .

## 7.6 Термическая деформация твердых тел

Твердые тела могут изменять свои размеры не только под действием механических напряжений, но и при изменении температуры. Изотропные вещества при небольшом (несколько градусов) изменении температуры  $\Delta T$  меняют свои размеры равномерно во всех направлениях. Поэтому можно характеризовать термическую деформацию одним *коэффициентом линейного расширения*  $\alpha_L$ , имеющим размерность  $K^{-1}$ :

$$\lambda = \alpha_L \cdot \Delta T. \tag{7.10}$$



.....  
Обычно с ростом температуры размеры тел растут, но имеются некоторые вещества (например, резина), у которых ситуация обратная — они при нагревании сжимаются. Для таких веществ коэффициент термического расширения  $\alpha_L$  будет отрицательным.  
.....

Если одно деформируемое твердое тело, помещенное между твердыми стенками из другого вещества, нагревать, то в обоих телах будут возникать механические напряжения, которые в этом случае называются термоупругими. Иногда они могут превысить предел прочности материала, и изделие из него изготовленное может разрушиться. Поэтому изделия, которые в процессе своей эксплуатации подвергаются большим перепадам температуры, делают из веществ с близкими коэффициентами термического расширения. Ярким примером таких изделий являются железобетонные конструкции, так как  $\alpha_L$  у бетона и железной арматуры равны.

Если деформация твердого тела как-то ограничена стенками, а температура меняется, то возникающие термоупругие механические напряжения должны быть ровно такими, чтобы обеспечить заданные размеры тела.

### 7.7 Деформация сдвига

До сих пор мы рассматривали деформации растяжение-сжатие, когда объем деформируемого образца изменялся, а углы между его гранями нет. Рассмотрим теперь деформации иного рода, когда образец может менять свою форму без изменения объема. Такие деформации называются *деформациями чистого сдвига*.

Выясним условия, необходимые для осуществления чистого сдвига. Формулы (7.8) дают необходимые условия, при которых объемная деформация  $\lambda_V$  обращается в 0. Для выяснения этих условий сложим три уравнения (7.8):

$$\lambda_V = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = \frac{1 - 2\mu}{E} (s_x + s_y + s_z). \tag{7.11}$$



.....  
Отсюда видно, что выделенный объем вещества не изменится при деформации, если сумма всех трех проекций напряжений обращается в нуль. Это может иметь место только тогда, когда вдоль одних направлений координат действуют напряжения сжатия, а вдоль других направлений — напряжения растяжения.  
.....

Посмотрим, что получится, если к телу приложено только *касательное напряжение*  $s_\tau = F/A$ . Рассмотрим кубик (см. рисунок 7.5), площадь каждой грани которого равна  $A = a^2$ . Представим, что кубик приклеен к плоскости, а к верхней его грани приложена касательная сила  $F$ .

Поскольку кубик при приложении этой силы никак не смещается как целое, то полная сила и полный момент силы относительно центра инерции должны быть равны нулю. Значит, на кубик действуют такие силы реакции опоры  $F_1$ , которые удовлетворяют этим условиям, причем модуль силы  $F_1 = F \cdot \sqrt{2}$ . С учетом сил реакций опоры деформацию однородного сдвига можно представить как суперпозицию однородного сжатия вдоль одной диагонали куба и растяжения вдоль другой.

Из рисунка 7.5 видно, что кубик деформируется в косоугольный параллелепипед, причем каждая из диагоналей кубика испытывает деформацию в результате суперпозиции равных по величине сжимающего и растягивающего напряжений, направленных вдоль диагоналей куба:

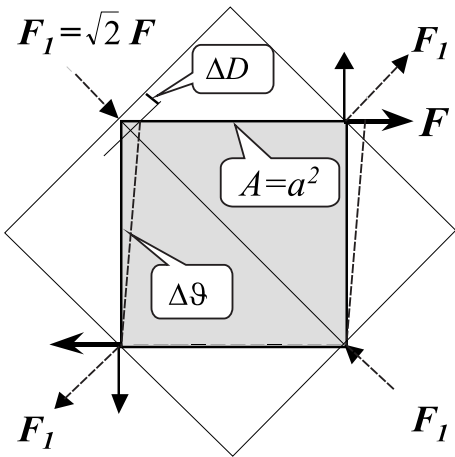


Рис. 7.5 – Деформация сдвига

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{F_1}{A\sqrt{2}} - \mu \left( -\frac{F_1}{A\sqrt{2}} \right) \right\} = \frac{F}{AE} (1 + \mu). \tag{7.12}$$

Обычно деформацию сдвига описывают величиной искажения прямого угла между гранями куба  $\vartheta$ . Из рисунка 7.5 видно, что горизонтальный сдвиг верхней грани равен  $\sqrt{2} \cdot \Delta D$ . Тогда

$$\vartheta = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{a} = 2 \frac{\Delta D}{D} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \frac{F}{A} = \frac{s_\tau}{E_G}, \quad E_G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \tag{7.13}$$

Величина  $E_G$  называется *модулем сдвига*, она также приводится в справочниках. Модуль сдвига более чем в два раза меньше модуля Юнга.

Именно способность сопротивляться сдвиговым деформациям отличает твердое состояние вещества от жидкого: ни жидкости, ни газы не оказывают сопротивления сдвиговым напряжениям. Хотя и жидкости, и газы «сопротивляются» изменению своего объема.

Для изотермического процесса сжатия газа можно ввести свой модуль всестороннего сжатия:

$$PV = \text{const}, \quad \Delta P \times V + \Delta V \times P = 0, \quad l_V = \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{P} = \frac{s_{gas}}{E_{V\,gas}}. \\ E_{V\,gas} = P. \tag{7.14}$$



.....  
Модуль всестороннего изотермического сжатия газа равен давлению газа  
.....



## Контрольные вопросы по главе 7

- 1) Какова размерность модуля упругости Юнга?
- 2) Что означает отрицательная величина напряжения в твердом теле?
- 3) Чему равно отношение Пуассона у несжимаемого материала?
- 4) В каком материале? закаленной стали или резине? можно запасти больше упругой энергии при одинаковой сжимающей силе?
- 5) При каком условии объем деформируемой среды не меняется?

---

# Глава 8

## ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

### 8.1 Момент инерции твердого тела

Рассмотрим теперь закономерности движения абсолютно твердого тела.



.....  
*Абсолютно твердым телом* будем называть такую совокупность материальных точек, расстояния между которыми никогда не меняются.  
.....

Найдем сначала выражение для кинетической энергии твердого тела произвольной формы, вращающегося вокруг фиксированной в пространстве оси. Суммарную кинетическую энергию протяженного тела вычислим как сумму кинетических энергий всех его материальных точек, подставляя для линейных скоростей точек  $v$  выражение (2.12) через угловую скорость вращения тела  $\omega$ :

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\omega \rho_i)^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}. \tag{8.1}$$

Здесь  $\rho_i$  — расстояние от точки  $i$ -ой точки тела до оси вращения, и введено обозначение новой скалярной величины — *момента инерции* тела:

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2. \tag{8.2}$$



.....  
Величина момента инерции протяженного тела зависит как от полной массы тела, так и от его формы, то есть распределения этой массы в пространстве относительно оси вращения. При изменении оси вращения момент инерции в общем случае тоже изменится.  
.....

Мы уже говорили, что угловая скорость  $\omega$  при описании вращений играет роль обычной скорости. Момент инерции при описании вращения является в этом же смысле аналогом массы тела, то есть мерой инертности тела по отношению к изменению ее угловой скорости. Об этой аналогии говорит и выражение (8.1) для кинетической энергии вращающегося тела, которое похоже на выражение (4.9) для кинетической энергии поступательного движения.

Очевидное свойство момента инерции — его *аддитивность*. То есть если тело состоит из нескольких частей, момент инерции которых известен (относительно заданной оси вращения!), то момент инерции всего тела равен сумме моментов инерции его частей. Отметим, что момент инерции как мера сопротивления угловому ускорению имеется у любого тела, независимо от того вращается тело или нет.

## 8.2 Моменты инерции некоторых простых тел

Рассмотрим некоторые способы определения момента инерции простейших тел. Найдем, например, момент инерции стержня массой  $M$  и длиной  $L$ , вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно оси симметрии. Его можно представить как сумму моментов двух половинок, момент инерции которых можно найти, заменяя в (8.1) сумму интегралом:

$$I = 2 \int_0^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{2M}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{L/2} = \frac{ML}{12}.$$

Если бы стержень вращался вокруг оси, проходящей не через центр, а через его конец, то мы бы получили для момента инерции этого же стержня величину в 4 раза большую.

Если воспользоваться формулой (5.2) для преобразования кинетической энергии из одной системы отсчета к другой, то можно доказать очень полезную теорему о параллельном переносе оси вращения. Эта теорема иногда называется теоремой Штейнера (или Гюйгенса):



.....  
Момент инерции  $I_A$  твердого тела массы  $M$  относительно произвольной оси  $A$  равен сумме момента инерции  $I_C$  тела относительно оси  $C$ , проходящей через *центр инерции* тела параллельно заданной оси  $A$ , и величины  $Ma^2$ , где  $a$  — расстояние между осями (см. рис. 8.1):

$$I_A = I_C + Ma^2. \tag{8.3}$$

.....  
Поэтому для вычисления момента инерции относительно произвольной оси вращения достаточно знать моменты инерции тел относительно осей, проходящих через их центр инерции, а относительно других осей их можно вычислить, пользуясь формулой (8.3).

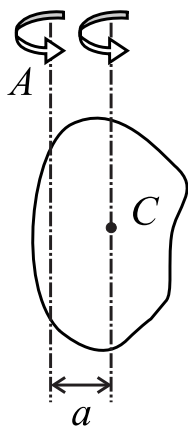


Рис. 8.1 – Пояснение к теореме о параллельном переносе оси вращения

Ниже приведена краткая таблица моментов инерции простейших однородных тел массы  $M$  для осей, проходящих через их центр инерции.

Таблица 8.1

| Форма и размеры тела                                          | Ось вращения                     | Момент инерции                                 |
|---------------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------|
| Тонкий стержень длиной $L$                                    | перпендикулярна оси стержня      | $\frac{1}{12}ML^2$                             |
| Тонкое плоское кольцо с радиусами $R_1$ и $R_2$               | перпендикулярна плоскости кольца | $\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$                  |
| Тонкое плоское кольцо с радиусами $R_1$ и $R_2$               | любой диаметр кольца             | $\frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2)$                  |
| Шар радиуса $R$                                               | любой диаметр шара               | $\frac{2}{5}MR^2$                              |
| Тонкая сфера радиуса $R$                                      | любой диаметр сферы              | $\frac{2}{3}MR^2$                              |
| Тонкая плоская прямоугольная пластинка со сторонами $a$ и $b$ | перпендикулярно к плоскости      | $\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$                     |
| Сплошной цилиндр радиуса $R$ и длиной $L$                     | перпендикулярно оси цилиндра     | $M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$ |



Обратим внимание, что момент инерции кольца, вращающегося вокруг диаметра, ровно в два раза меньше момента инерции этого же кольца, вращающегося вокруг своей оси симметрии.



### 8.3 Момент силы

Перейдем теперь к выяснению вопроса о том, какая величина при описании вращения играет роль силы, то есть от чего зависит угловое ускорение твердого тела. Подойдем к этому вопросу с энергетических позиций. Для поступательного движения мы доказали *теорему о кинетической энергии*, в которой проявилось свойство силы совершать работу, а значит, изменять кинетическую энергию.

Найдем работу силы (см. рис. 8.2), которая поворачивает материальную точку  $P(x,y)$ , удаленную от оси вращения на расстояние  $\rho$ , на малый угол  $\Delta\vartheta$  вокруг оси  $Oz$ .

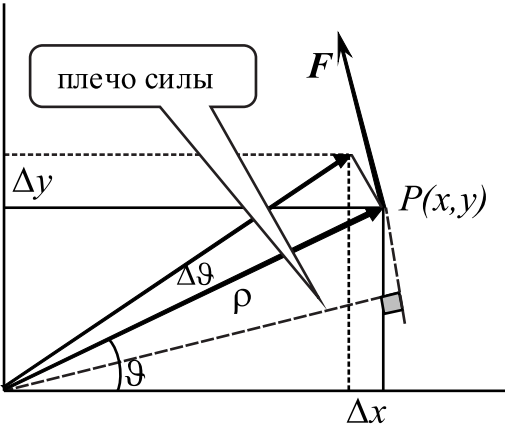


Рис. 8.2 – Работа силы при вращении ее точки приложения

Из рисунка 8.2 нетрудно видеть, что при повороте точки  $P$  на малый угол  $\Delta\vartheta$  ее координаты  $x$  и  $y$  получают соответствующие приращения:

$$\Delta x = -\rho\Delta\vartheta \sin \vartheta = -y\Delta\vartheta, \quad \Delta y = \rho\Delta\vartheta \cos \vartheta = x\Delta\vartheta.$$

Тогда работа приложенной силы  $\mathbf{F}$ , будет равна:

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (xF_y - yF_x) \Delta\vartheta. \tag{8.4}$$

Так как аналогом перемещения у нас является угол  $\Delta\vartheta$ , то величина, стоящая перед  $\Delta\vartheta$ , и даст нам «вращательный» аналог силы.

Выражение, стоящее в скобках, нам уже знакомо: это  $z$ -компонента векторного произведения  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Эта векторная величина и называется моментом силы.



.....  
**Момент силы** является результатом векторного произведения радиус-вектора материальной точки  $\mathbf{r}$  на силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к данной точке:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M = rF \sin(\angle \mathbf{r}, \mathbf{F}). \tag{8.5}$$

.....  
Легко видеть, что произведение  $r \sin(\angle \mathbf{r}, \mathbf{F})$  определяет так называемое *плечо силы* — расстояние от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила.

Поэтому при повороте тела «работает» только тангенциальная составляющая силы, перпендикулярная радиус-вектору точки. Сила, не имеющая тангенциальной составляющей, не может изменить вращательную энергию тела. Ясно, что закручивающая сила действует тем эффективнее, чем больше ее плечо.

Продолжим поиск аналогий в описании вращательного движения. Подобно тому, как при поступательном движении сила равна скорости изменения импульса, так и при вращении тела момент силы равняется скорости изменения некоторой физической величины, которая носит название *момента импульса*.

### 8.4 Момент импульса

Посмотрим, какую величину изменяет z-компонента момента силы **M**:

$$M_z = xF_y - yF_x = x \cdot m \frac{dv_y}{dt} - y \cdot m \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} (x \cdot mv_y - y \cdot mv_x) = \frac{d}{dt} (xp_y - yp_x) = \frac{dL_z}{dt}.$$

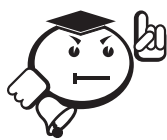
Здесь вместо проекций вектора силы подставлены равные им произведения массы точки на ее ускорение, то есть производную скорости по времени.

В результате получили, что под действием момента силы  $M_z$  изменяется величина  $L_z$ , которая сама является z-компонентой некоторого вектора, получающегося в результате векторного произведения радиус-вектора и импульса частицы. Таким образом, роль импульса при описании вращения материальной точки играет вектор момента импульса:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{8.6}$$

Для твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  как целое вокруг неподвижной оси z, выражение для z-проекции момента импульса  $L_z$  выглядит совсем просто:

$$\begin{aligned} L_z &= \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \right)_z = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))_z = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i))_z = \\ &= \omega \sum_i m_i (r_i^2 - r_{iz}^2) = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = I\omega. \end{aligned} \tag{8.7}$$



.....  
При выводе мы воспользовались выражением (2.9) для двойного векторного произведения  
.....

Мы получили для компоненты момента импульса произведение уже известного нам момента инерции на угловую скорость. Аналогия с поступательным движением и здесь полностью сохраняется.

# 8.5 Динамика вращательного движения

Основной динамический закон для вращения выглядит аналогично закону Ньютона, но для других векторов — «вращательных» аналогов:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \tag{8.8}$$

Его можно вывести из определения момента импульса (8.6), если продифференцировать его по времени:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}.$$

Второй член в правой части обращается в нуль, так как векторы скорости и импульса всегда коллинеарные (их векторное произведение всегда равно нулю). Рассмотрим следствия, вытекающие из (8.8).

Отметим сразу закон сохранения момента импульса:



.....  
Если момент сил, действующий на тело, равен нулю, то момент импульса тела сохраняется.  
.....

У закона сохранения момента импульса ситуация более интересна, чем у закона сохранения обычного импульса, так как система за счет внутренних сил может перераспределять внутри себя массу, то есть изменять свой момент инерции. В этом случае угловая скорость вращения тела может изменяться под действием внутренних сил, но произведение  $I\omega = \text{const}$  остается постоянным.

Далее отметим, что векторы момента силы и момента импульса, вообще говоря, меняются при переходе к другой системе отсчета, в том числе и при переносе начала координат. Рассмотрим, например, преобразование момента силы при переносе начала координат на постоянный вектор  $\mathbf{a}$ . В этом случае вместо радиус-векторов всех материальных точек необходимо подставить выражение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ :

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{a} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}' + \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \tag{8.9}$$

Отсюда видно, что величина момента силы, приложенного к телу, не зависит от выбора точки начала координат, если полная приложенная к нему сила  $\mathbf{F}$  равна нулю. Такая ситуация изображена на рисунке 8.3.

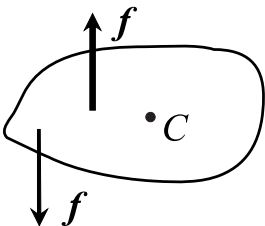


Рис. 8.3 – Пара сил, действующая на твердое тело

В таком случае говорят, что к телу приложена *пара сил*. На первый взгляд, далеко не очевидно, что пара сил не может изменить скорость центра инерции тела (на рис. 8.3 центр масс тела обозначен буквой  $C$ ). Но это именно так, потому что полная сила, действующая на тело,  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}_i = 0$ .

Действительно, в этом случае момент силы не зависит от выбора оси, относительно которой определяется момент сил. Поэтому вращение тела под действием пары сил будет происходить только вокруг его центра инерции  $C$ , причем сам центр инерции не будет менять свою скорость.

Теперь можно сформулировать необходимые и достаточные условия равновесия тел в виде теоремы:



.....  
Чтобы первоначально покоящееся твердое тело не изменяло в дальнейшем свое положение в пространстве, то есть не перемещалось и не вращалось, необходимо и достаточно, чтобы сумма всех внешних сил и сумма моментов всех внешних сил равнялись нулю.  
.....

Это утверждение является фундаментальной основой для *статики* — еще одного раздела механики.

### 8.6 Скатывание круглого тела с наклонной плоскости

Круглое тело скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, как показано на рис. 8.4. Момент инерции тела относительно его оси симметрии  $I$ , масса тела  $m$ , его радиус  $R$ .

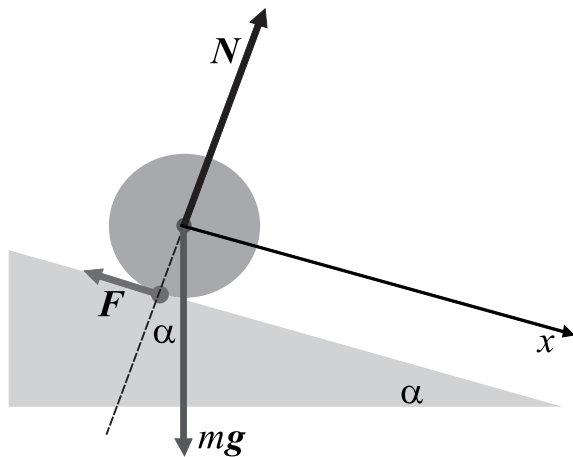


Рис. 8.4 – Силы, действующие на скатывающееся по плоскости тело

Найдем ускорение скатывающегося тела  $a$  и условие, при выполнении которого тело при скатывании не будет проскальзывать.

Изобразим сначала все силы, действующие на тело: силу тяжести  $mg$ , силу реакции опоры  $N$ , силу трения покоя  $F$  (поскольку по условию задачи проскальзывания в точке касания нет, то имеет место именно трение покоя).

Выберем ось системы отсчета  $Ox$  вдоль направления наклонной плоскости. Поскольку тело одновременно участвует в двух видах движения, запишем два уравнения движения: уравнение поступательного движения вдоль оси  $Ox$  и уравнение вращательного движения вокруг оси симметрии тела:

$$ma = mg \sin \alpha - F, \quad (8.10)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = FR. \quad (8.11)$$

Здесь мы воспользовались тем, что момент импульса тела равен  $L = I\omega$ , а вращающий момент силы создается только силой трения. Сила тяжести и сила реакции  $N$  не имеют плеча относительно оси вращения.

Заметим теперь, что ускорение поступательного движения  $a$  и угловое ускорение при отсутствии проскальзывания жестко связаны условием:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{R}. \quad (8.12)$$

Подставляя (8.12) в (8.11) и подставляя силу трения покоя из получившегося уравнения в (8.10), получим искомое ускорение  $a$ :

$$I \frac{a}{R} = FR \rightarrow F = \frac{I}{R^2} a, \quad a \left( 1 + \frac{I}{mR^2} \right) = g \sin \alpha, \quad (8.13)$$

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}. \quad (8.14)$$

Как видно, учет вращательного движения приводит к снижению ускорения поступательного движения. Это находится в полном соответствии с тем, что часть потенциальной энергии тела при его скатывании должна уходить в кинетическую энергию вращения.

Найдем теперь из (8.13) и (8.14) выражение для силы трения покоя:

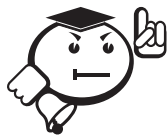
$$F = mg \frac{I}{I + mR^2} \sin \alpha. \quad (8.15)$$

Проскальзывания не будет, если эта сила  $F$  не будет превышать силу трения скольжения, величина которой определяется коэффициентом трения  $\mu$  и силой нормального давления  $N$ :

$$F \leq \mu N \rightarrow mg \frac{I}{I + mR^2} \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha,$$

откуда найдем обязательное условие отсутствия проскальзывания:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right). \quad (8.16)$$



.....

Формула (8.13) позволяет также найти ускорение  $a$  так называемого маятника Максвелла, который показан на рис. 8.5. Это тело вращения, имеющее момент инерции  $I$  и подвешенное на нитях или ленте, накрученной на ось радиуса  $R$ . Для этого достаточно в (8.13) положить  $\alpha = 90^\circ$ , а роль силы  $F$  в этом случае играет сила натяжения нити. Если радиус оси  $R$  будет достаточно мал, то ускорение падения маятника Максвелла может быть сделано весьма малым.

.....

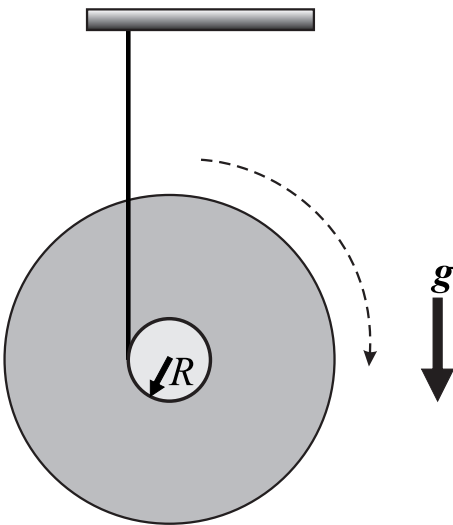


Рис. 8.5 – Маятник Максвелла



.....

### Контрольные вопросы по главе 8

.....

- 1) От каких факторов зависит величина момента инерции твердого тела?
- 2) Зависит ли величина момента внешней силы, действующей на тело, от выбора точки, относительно которой определяется плечо этой внешней силы?
- 3) Можно ли изменить угловую скорость вращения космического корабля, не выходя из него, а перемещаясь только внутри него?
- 4) Твердое тело свободно вращается по инерции с некоторой постоянной угловой скоростью. Испытывают ли материальные точки этого тела ускорение?
- 5) Какой предмет? шарик или цилиндр? будет скатываться с наклонной плоскости с меньшим ускорением? Радиусы и массы предметов равные.

# Глава 9

## ТРЕХМЕРНОЕ ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### 9.1 Тензор момента инерции твердого тела

Реальные макроскопические тела могут вращаться в пространстве одновременно вокруг нескольких осей. При этом всегда встает вопрос о направлении вектора угловой скорости и вектора момента импульса. Ранее мы сильно упростили задачу, считая эти векторы коллинеарными. Для произвольного тела это, вообще говоря, неверно.



.....  
Вектор момента импульса  $L$  в общем случае не совпадает по направлению с осью вращения, которая всегда совпадает с вектором угловой скорости  $\omega$ .  
.....

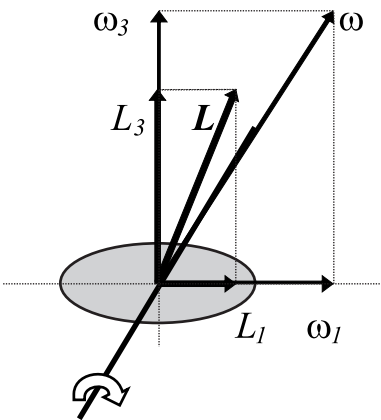


Рис. 9.1 – Векторы угловой скорости и момента импульса несимметричного тела

Это следует из того факта, что момент инерции одного и того же тела различен относительно различных осей вращения. Это верно и для тела произвольной

формы, и для случая, когда ось вращения не совпадает с осью симметрии тела вращения, как показано на рис. 9.1.

При пространственном вращении тела вокруг такой оси даже в случае постоянной угловой скорости возникает необходимость создавать момент силы, обеспечивающий соответствующее вращение вектора момента импульса в пространстве. На практике это проявляется как периодические биения в местах крепления оси вращения.

Как же рассчитать направление вектора момента импульса, и в каких случаях этот вектор по направлению совпадает с угловой скоростью? Для этого надо обратиться к общему выражению для момента импульса (формула (8.7)). Из нее видно, что проекции вектора момента импульса  $L_\alpha$  на произвольную ось  $\alpha$  получаются в виде линейной комбинации проекций вектора угловой скорости  $\omega_\beta$ :

$$L_\alpha = \sum_i m_i \left[ \omega_\alpha r_i^2 - r_{i\alpha} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \right] = \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \omega_\beta. \tag{9.1}$$

Девять коэффициентов  $I_{\alpha\beta}$  образуют так называемый *тензор момента инерции*. Компоненты этого тензора удобно записать в виде квадратной таблицы, которая называется матрицей (для краткости записи опущены индексы):

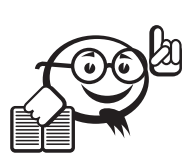
$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m (y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m (x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m (x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

где суммирование производится по всем точкам объема тела.

Тензор — это объект, компоненты которого зависят от выбора системы координат. При переходе к другой системе координат новые компоненты тензора  $I'_{\alpha\beta}$  выражаются в виде линейной комбинации старых компонент  $I_{\alpha\beta}$ , причем коэффициенты преобразования  $A_{\alpha\beta}$  те же, что и для преобразования координат векторов (1.10):

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\delta=1}^3 A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} I_{\gamma\delta}.$$

Из определения (9.2) очевидно, что тензор момента инерции  $I_{\alpha\beta}$  — симметричный тензор:  $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ . Для симметричных тензоров имеется математическая теорема:



.....  
Любой симметричный тензор соответствующим выбором системы координат может быть приведен к диагональному виду, когда только диагональные элементы матрицы не равны нулю.  
.....

Эти направления осей называются *главными осями инерции*, а соответствующие значения компонент тензора — *главными моментами инерции*. Будем обозначать их так:  $I_1^0$ ,  $I_2^0$  и  $I_3^0$ .

Если тело обладает осями симметрии, то главные оси совпадают с этими осями. Так, если тело является шаром или кубом, то все три главных значения момента инерции равны.

Из (9.2) также следует одно полезное свойство тензора инерции для плоского тела (не имеющего толщины вдоль оси  $Oz$ ) — его главные моменты инерции связаны равенством:  $I_3^0 = I_1^0 + I_2^0$ .



## 9.2 Энергия и момент импульса несимметричного тела

Выражение для кинетической энергии вращающегося твердого тела в общем случае тоже выражается через компоненты тензора момента инерции. Приведем его без вывода:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{3,3} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2, \quad (9.3)$$

где  $I_\omega$  — момент инерции тела относительно произвольной оси вращения  $\boldsymbol{\omega}$ .

Если известны три главных момента инерции тела  $I_1, I_2, I_3$  и направление оси вращения относительно трех главных осей, то величину  $I_\omega$  найти довольно легко. Пусть направление оси вращения  $\boldsymbol{\omega}$  (по определению оно совпадает с направлением вектора угловой скорости) относительно трех главных осей  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  задано направляющими косинусами:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_x \cdot \omega \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cdot \omega \cos \beta + \mathbf{e}_z \cdot \omega \cos \gamma.$$

Тогда для вектора момента импульса в соответствии с формулой (9.1) имеем:

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_x \cdot I_1 \omega \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cdot I_2 \omega \cos \beta + \mathbf{e}_z \cdot I_3 \omega \cos \gamma.$$

А для проекции этого вектора на ось вращения имеем:

$$L_\omega = \frac{\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega} = I_1 \omega \cos^2 \alpha + I_2 \omega \cos^2 \beta + I_3 \omega \cos^2 \gamma,$$

откуда получаем искомый момент инерции:

$$I_\omega = \frac{L_\omega}{\omega} = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma. \quad (9.4)$$

## 9.3 Гироскоп

Рассмотрим поведение твердого тела вращения, имеющего одну ось симметрии. Его называют *симметричным волчком*. Если такое тело сильно раскручено вокруг оси, то его называют *гироскопом*. Точнее, такое название имеет прибор, используемый в самолетах, танках и на кораблях для определения их ориентации в пространстве. Гироскоп обладает замечательным свойством — сохранять ориентацию оси вращения в пространстве, если на нее не действуют внешние силы. Если же внешние силы все-таки имеются, то гироскоп ведет себя непривычным способом — он начинает медленно вращаться вокруг другой оси. Это медленное вращение называется *прецессией* гироскопа.

Начнем с исходного положения вертикальной оси вращения  $OO$ , совпадающей с осью симметрии тела. Естественно, что вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  совпадает с этим же направлением. На рис. 9.2 показана система координат гироскопа.

Но если мы попытаемся парой сил  $\mathbf{f}, \mathbf{f}$  повернуть гироскоп вокруг оси  $O'O'$  (то есть создадим момент силы  $\mathbf{M}$ , направленный вдоль этой оси), то ось гироскопа

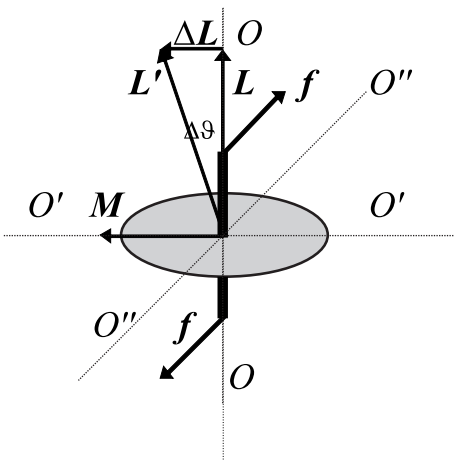


Рис. 9.2 – Оси вращения гироскопа

начнет вращаться вокруг третьей оси  $O''O''$ . Если момент силы вдоль  $O'O'$  остается ортогональным вектору  $L$  в течение длительного времени, то гироскоп будет вращаться с постоянной угловой скоростью прецессии  $\Omega_{pr}$  вокруг оси  $O''O''$ . Это, парадоксальное на первый взгляд, поведение полностью отвечает закону движения (8.8). Величину  $\Omega_{pr}$  легко определить из рисунка 9.3:

$$\Omega_{pr} = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta L}{L}}{\Delta t} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{M}{L}.$$

В общем случае эта связь векторов выглядит так:

$$\Omega_{pr} \times L = M. \tag{9.5}$$

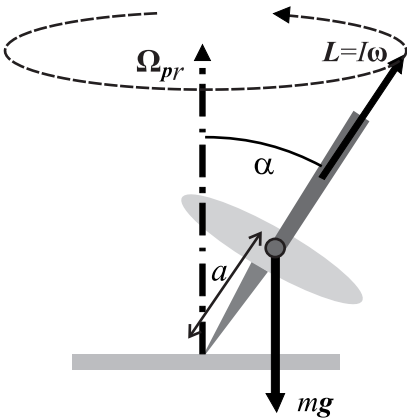


Рис. 9.3 – Прецессия гироскопа

Так, для волчка массой  $m$  с моментом инерции  $I = km$ , раскрученного вокруг своей оси до скорости  $\omega$ , центр масс которого отстоит от точки опоры на расстояние  $a$ , скорость прецессии  $\Omega_{pr}$  вокруг точки опоры будет равна:

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{L \sin \alpha} = \frac{mga \sin \alpha}{km\omega \sin \alpha} = \frac{ag}{k\omega}.$$

Как видно, угловая скорость прецессии не зависит от массы и угла наклона  $\alpha$  оси волчка к вертикали. Чем сильнее раскручен гироскоп вокруг своей оси (чем больше  $\omega$ ), тем ниже угловая скорость прецессии.

## 9.4 Центробежные силы и силы Кориолиса

Рассмотрим теперь, какие *силы инерции* (напомним, что эти силы являются псевдосилами) появляются в неинерциальной системе отсчета, равномерно вращающейся относительно фиксированной в пространстве оси. Именно такой системой отсчета является поверхность Земли, совершающей суточное вращение.

Посмотрим на вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega$  систему отсчета  $K$  из инерциальной системы  $K'$ . Тогда в системе  $K'$  скорость точки  $\mathbf{v}'$  будет складываться из ее скорости  $\mathbf{v}$  относительно системы  $K$  и скорости переноса точки, имеющий радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , за счет вращения системы отсчета  $\mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}. \quad (9.6)$$

Это же выражение можно записать через производные радиус-вектора точки:

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}. \quad (9.7)$$

Равенство (9.7) является общим выражением для скорости изменения любого вектора  $\mathbf{r}$ , «прикрепленного к вращающейся системе отсчета»: изменение вектора во времени складывается из его изменения относительно вращающейся системы отсчета и из поворота самого вектора за счет вращения системы отсчета.

Применим выражение (9.7) к производной по времени от уравнения (9.6):

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \Omega \times \mathbf{r} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times [\Omega \times \mathbf{r}].$$

Если теперь умножить это уравнение на массу материальной точки, то мы можем приравнять полученную величину внешней силе  $\mathbf{F}_0$ , приложенной к точке. Полученное уравнение движения удобно переписать в привычном виде второго закона Ньютона для относительной скорости точки:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_0 + 2m\mathbf{v} \times \Omega - m\Omega \times [\Omega \times \mathbf{r}]. \quad (9.8)$$

Из этого уравнения видно, что относительное ускорение точки во вращающейся системе отсчета создается не только внешней силой  $\mathbf{F}_0$ , но и двумя псевдосилами инерции, зависящими от угловой скорости вращения  $\Omega$  системы отсчета и пропорциональными массе точки.

Первая псевдосила описывается вектором, направленным перпендикулярно оси вращения от нее, и имеет величину:

$$F_1 = m|\Omega \times [\Omega \times \mathbf{r}]| = m\Omega^2 r \sin(\angle \mathbf{r}, \Omega) = m\Omega^2 \rho, \quad (9.9)$$

где  $\rho$  — расстояние точки от оси вращения системы отсчета. Это знакомая всем по карусели *центробежная сила*. Центробежная сила направлена всегда перпендикулярно оси вращения системы отсчета, как показано на рис. 9.4.

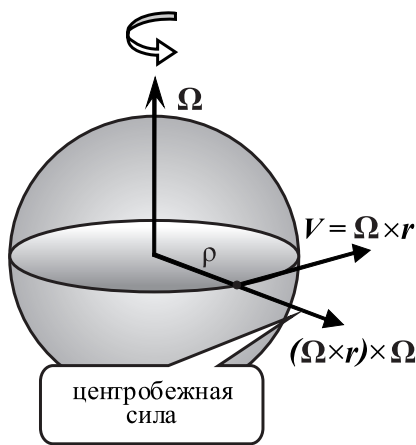


Рис. 9.4 – Величина и направление центробежной силы инерции



.....  
Центробежная сила обращается в нуль на оси вращения системы отсчета.  
.....

Вторая псевдосила называется *силой Кориолиса*:

$$F_2 = 2m\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}.$$
(9.10)

Она зависит от вектора скорости  $\mathbf{v}$  точки (см. рис. 9.5) и обращается в нуль, если направление скорости перемещения точки  $\mathbf{v}$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{\Omega}$ .

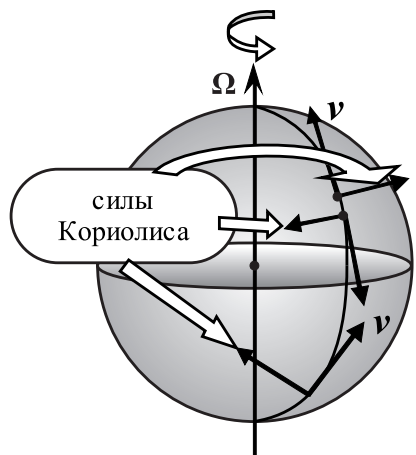


Рис. 9.5 – Направление сил Кориолиса

Проявления сил инерции, вызванных вращением Земли, хорошо заметны. Центробежная сила уменьшает ускорение свободного падения на экваторе Земли по сравнению с полярными областями. Сила Кориолиса приводит к закручиванию против часовой стрелки атмосферных циклонов и подмыванию правых берегов рек в Северном полушарии Земли, текущих в меридиональном направлении.



## Контрольные вопросы по главе 9

- 1) В каких частных случаях направление оси вращения твердого тела совпадает с направлением вектора момента импульса?
- 2) Как может проявляться на практике несовпадение оси вращения и направления вектора момента импульса?
- 3) Куб может вращаться вокруг оси 1, проходящей через центры противоположных граней, и вокруг оси 2, проходящей через две вершины, лежащие на главной диагонали куба. Одинаковая или различная будет величина момента инерции куба при вращении вокруг этих осей?
- 4) Гироскоп быстро вращается по часовой стрелке, если смотреть на него сверху. В каком направлении будет вращаться свободный конец его оси при прецессии?
- 5) Снаряд вылетает из ствола зенитного орудия вертикально вверх на экваторе Земли. В каком направлении (север-юг, восток-запад, вверх-вниз) будет действовать на него сила Кориолиса?
- 6) Действует ли на ракету, стоящую на стартовой позиции на экваторе Земли, какая-либо сила инерции?

---

## Глава 10

# СИЛА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

---

### 10.1 Закон всемирного тяготения Ньютона

Закон гравитационного притяжения был впервые сформулирован Ньютоном в 1684 г. на основе анализа движения небесных тел.

В современной трактовке этот закон можно записать в виде зависимости для модуля силы притяжения  $F$ , действующей между двумя точечными массами  $m_1$  и  $m_2$ , удаленными друг от друга на расстояние  $r$ :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (10.1)$$

Вектор силы взаимного притяжения  $F$  двух материальных точек всегда направлен вдоль прямой линии, их соединяющей. Ситуация изображена на рис. 10.1.

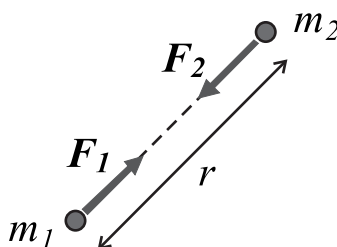


Рис. 10.1 – Направление силы гравитационного взаимодействия

Коэффициент пропорциональности  $G$  в формуле Ньютона (10.1) называется *гравитационной постоянной*, его современное значение равно  $G \cong 6.67 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>.



.....

Мы ранее уже вводили понятие массы тела как меры его инертности, входящей в уравнение второго закона Ньютона (3.1). Сейчас же это понятие массы используется в законе (10.1) как мера силы взаимодействия. Ньютон прекрасно понимал, что свойства массы быть мерой инертности тела и мерой гравитационного притяжения совершенно различны по физической сути. И он употреблял эти понятия отдельно. Но, опираясь на результаты опытов Галилея о равенстве ускорений всех тел вблизи поверхности Земли, Ньютон полагал, что в силу не известных пока причин эти массы с высокой точностью пропорциональны друг другу.

.....

Позже предпринимались неоднократные попытки найти разницу между *гравитационной и инертной массами* тел, но все они не увенчались успехом. Эйнштейн сделал предположение, что эти массы совпадают по определению, и положил *принцип эквивалентности* инертной и гравитационной масс в основу общей теории относительности.



.....

Силы гравитации подчиняются принципу суперпозиции, и они ничем не могут быть экранированы. То есть силы притяжения между двумя рассматриваемыми материальными точками не могут быть усилены или ослаблены какими-либо другими телами, размещенными между ними.

.....

Силы всемирного тяготения относятся к фундаментальным консервативным силам природы. Как и любые консервативные силы, гравитационное притяжение двух тел с массами  $M$  и  $m$  удобно описывать потенциальной функцией, которая обращается в нуль при бесконечном удалении тел:

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} \rightarrow \mathbf{F} = -\nabla U = G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{10.2}$$

Операция градиента функции  $U(r)$ , которая определяется формулой (4.18), дает нам как раз величину и направление консервативной силы (10.1). Знак « $-$ » в выражении для  $U(r)$  указывает на притягивающий характер взаимодействия, когда потенциальная энергия тел растет при увеличении расстояния между ними.

Несмотря на то, что простой количественный закон (10.1) не был выведен из каких-либо общих теоретических соображений, а был фактически «угадан» Ньютоном, он на практике выполняется с очень высокой точностью. Этой точности достаточно, чтобы рассчитывать орбиты движения небесных тел и космических аппаратов в Солнечной системе с точностью до метра, а моменты наступления астрономических явлений (например, солнечных затмений) с точностью до секунды.

## 10.2 Гравитация вблизи протяженных тел

Закон (10.1) является математически строгим только для точечных масс.

Если хотя бы одно из взаимодействующих тел является протяженным, то силу взаимодействия приходится определять с помощью интегрирования.

1. Рассмотрим для примера силу притяжения тонкого однородного кольца радиуса  $R$  и массой  $M_R$  и лежащей на оси кольца на расстоянии  $x$  от центра кольца точки массой  $m$  (рис. 10.2).

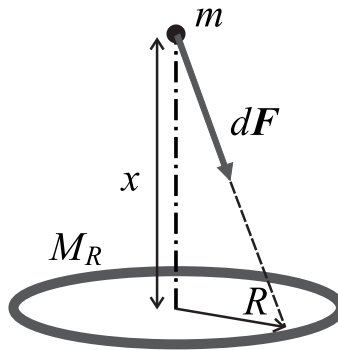


Рис. 10.2 – Гравитационное притяжение кольца и материальной точки

В этом случае суммирование сил провести совсем не трудно, так как в силу симметрии задачи ясно, что результирующая сила  $F_R$  будет направлена вдоль оси симметрии, а ее величина может быть вычислена как проекция частичных сил  $dF$  на эту ось симметрии:

$$F_R = \oint \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} dF = G \int_0^{2\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + R^2} \cdot \frac{M_R m}{2\pi} d\varphi = GM_R m \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (10.3)$$

Сила обращается в нуль, если масса  $m$  находится точно в центре кольца при  $x = 0$ .

2. Если мы хотим найти силу притяжения  $F_D$  материальной точки и сплошного диска массы  $M_D$  и радиуса  $R$ , то предыдущую формулу (10.3) можно использовать как подынтегральное выражение:

$$F_D = \int_0^R Gm \left( \frac{M_D}{\pi R^2} \right) \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi r dr = \frac{2GM_D m}{R^2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right), \quad (10.4)$$

откуда видно, что даже при  $x = 0$  сила притяжения материальной точки к сплошному диску имеет конечную величину.

3. Найдем силу притяжения  $F_S$  поллой сферы массой  $M_S$ , радиусом  $R$  и материальной точки массой  $m$ , находящейся на расстоянии  $x > R$  от центра сферы. В этом случае сферу можно мысленно разбить на совокупность тонких колец, масса которых будет пропорциональной их площади, как показано на рис. 10.3.



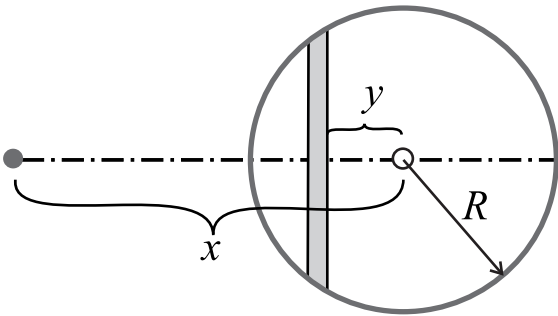


Рис. 10.3 – К вычислению силы притяжения сферы и материальной точки

Используя формулу для притяжения кольца (10.3), можно найти силу притяжения всей сферы:

$$F_S = Gm \int_{-R}^R \frac{x - y}{((x - y)^2 + (R^2 - y^2))^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{M_S}{4\pi R^2} \right) 2\pi R \cdot dy = G \frac{M_S m}{x^2}. \tag{10.5}$$

Это выражение по форме совпадает с силой притяжения двух материальных точек, удаленных на расстояние  $x$ .

4. Поскольку сплошной шар можно представить как совокупность вложенных полых сфер, то выражение для силы притяжения материальной точки и шара совпадает с (10.5). Для всех трех рассмотренных случаев (10.3)–(10.5) при  $x \rightarrow \infty$  сила убывает как  $1/x^2$ , как это и должно быть для двух материальных точек.

5. Закон (10.1) дает еще одно замечательное следствие:



.....  
Действие сил гравитации в любой точке внутри однородной сферической оболочки полностью уравновешено.  
.....

Это видно из приведенного рисунка 10.4. Для любой точки, лежащей внутри сферической оболочки, можно мысленно построить двусторонний тонкий конус, вырезающий на поверхности сферы овальные участки.

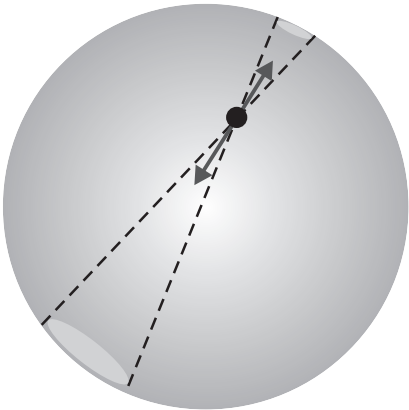


Рис. 10.4 – Равновесие сил гравитации внутри однородной сферы

Площадь, а значит, и масса этих вырезанных участков пропорциональны квадрату расстояния от поверхности сферы до точки. Поэтому две противоположно направленные силы притяжения, действующие на материальную точку со стороны поверхностных масс и подчиняющиеся закону (10.1), дают нулевую результирующую силу. Поскольку эта закономерность имеет место для любой ориентации конуса, то и вся массивная оболочка не будет оказывать силового воздействия на любую материальную точку, помещенную внутрь сферы.



.....  
Таким образом, массивные тела, имеющие протяженную форму, притягивают материальную точку с силой, довольно сложным образом зависящей от размеров тела и расстояния до материальной точки.  
.....

### 10.3 Приливные силы

Теперь рассмотрим качественно действие гравитации не на материальную точку, а на протяженное в пространстве массивное тело.

В неоднородном поле тяготения на протяженное тело действуют разрывающие, так называемые *приливные силы*. Эти силы могут быть достаточными, чтобы разрушить большое тело, обращающееся на орбите, или не позволить соединиться нескольким таким телам.

Приливные силы обусловлены тем, что разные точки протяженного тела испытывают в неоднородном поле тяготения различные ускорения, как показано на рис. 10.5. Если бы эти точки не были связанными друг с другом, то при их свободном падении расстояния между ними увеличивались бы со временем. Так же точно любое протяженное свободно падающее тело, состоящее из материальных точек, будет испытывать действие сил, стремящихся его деформировать.

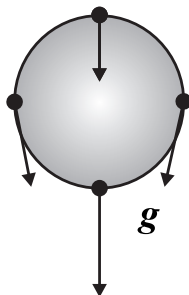


Рис. 10.5 – Действие неоднородных сил тяготения на точки протяженного тела

Если тело невелико, то его целостность обеспечивается силами сцепления. Если же деформирующая сила будет больше сил сцепления, то тело может быть разорвано на части. Величина приливных сил пропорциональна размерам тела и степени неоднородности поля тяготения.

Если тело, на которое действует неоднородное поле тяготения, не симметрично, то направление действия равнодействующей силы тяготения не проходит через

центр инерции тела. В результате возникает суммарный момент сил, который влияет на собственное вращение тела. Следствием этого воздействия является неравномерное вращение тела вокруг своего центра масс, а также прецессия оси вращения тела.

## 10.4 Задача Кеплера

Рассмотрим движение двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , взаимодействующих с силой  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , величина которой зависит только от расстояния между точками. Введем вектор  $\mathbf{r}$ , начало которого совпадает с точкой  $m_2$ , а конец — с другой материальной точкой  $m_1$ . Совместим начало координат с центром масс двух точек. Это дает нам два уравнения:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Из этих двух равенств находим:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r} \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (10.6)$$

Два уравнения движения

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mathbf{F}$$

путем подстановки в них выражений (10.6) сводятся к единственному уравнению движения для одной материальной точки с *приведенной массой*  $m$  около неподвижного силового центра:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (10.7)$$

Применим уравнение (10.7) к описанию относительного движения двух тел под действием гравитационной силы взаимного притяжения. Эта задача называется *задачей Кеплера*.

Траектория движения материальной точки массы  $m$  относительно неподвижного силового центра, характеризуемого потенциальной функцией (10.2) с константой притяжения  $\alpha$ , может быть найдена из уравнения:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}, \quad \alpha = G m_1 m_2 > 0. \quad (10.8)$$

Поскольку гравитационная сила действует только вдоль радиуса, то момент этой силы относительно притягивающего центра всегда равен нулю, а значит, момент импульса точки относительно силового центра сохраняется. Для одной частицы момент импульса  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , и постоянство  $\mathbf{L}$  в пространстве означает, что радиус-вектор  $\mathbf{r}$  всегда лежит в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{L}$ . Таким образом, траектория частицы в поле точечного центра тяготения лежит в одной плоскости, в этой же плоскости лежит силовой центр.

Описывая движение частицы вокруг неподвижного центра удобно перейти в полярную систему координат, в которой положение точки задается расстоянием

от начала координат  $r$  и азимутальным углом  $\varphi$ . В этой системе закон сохранения момента импульса запишется как

$$L = mv_{\varphi}r = mr^2\omega = mr^2\frac{d\varphi}{dt} = \text{const}, \tag{10.9}$$

где мы использовали для *азимутальной скорости* выражение  $v_{\varphi} = r(d\varphi/dt)$ .

Геометрическая интерпретация этого равенства заключается в постоянстве *секториальной скорости*  $dS/dt$ , то есть равенстве площади  $dS = 1/2r^2 d\varphi$ , заметаемой радиус-вектором частицы за равные интервалы времени  $dt$ :

$$L = 2m\frac{dS}{dt} = \text{const}. \tag{10.10}$$

Это известный *второй закон Кеплера* для планет Солнечной системы.



.....

Отметим, что из (10.9) следует вывод о том, что азимутальный угол  $\varphi$  всегда меняется монотонно, то есть частица не делает пятных движений по орбите.

.....

Запишем выражение для полной энергии частицы в полярной системе координат:

$$E = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}, \tag{10.11}$$

где использовано равенство (10.9) для момента импульса частицы.

Выражение для энергии (10.11) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с «эффективной потенциальной энергией»:

$$U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{10.12}$$

Второй член в правой части (10.12) называется *центробежной энергией*. Наличие его не позволяет частице с  $L \neq 0$  упасть на притягивающий точечный центр. График зависимости (10.12) показан на рис. 10.6.

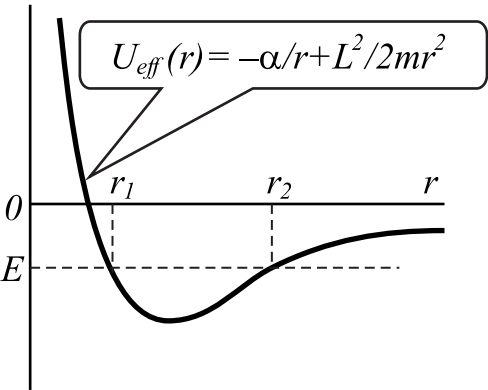


Рис. 10.6 – Эффективная потенциальная энергия точки в поле силового центра

Значения  $r$ , при которых  $U_{eff}$  равняется  $E$ , определяют радиальные границы области движения. В этих точках *радиальная скорость* ( $dr/dt$ ) обращается в нуль, но частица полностью не останавливается, так как угловая скорость ( $d\varphi/dt$ ) в нуль не обращается.

Если полная энергия отрицательная  $E < 0$ , то область изменения  $r$  имеет две границы:  $r_1 \leq r \leq r_2$  и траектория целиком лежит в этой области радиусов. Такие траектории, как будет видно ниже, представляют собой эллипсы.

Если же полная энергия положительная  $E > 0$ , то существует только одна точка пересечения  $E = U_{eff}(r)$ . Частица в этом случае приходит с бесконечно далекого расстояния и после максимального сближения уходит на бесконечное расстояние. Траектория в этом случае имеет форму гиперболы.

Интегрирование двух уравнений для радиальной (10.11) и азимутальной (10.9) координат приводит к следующей формуле для траектории движения:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{\alpha m}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (10.13)$$

Это уравнение конического сечения с фокусом в начале координат,  $p$  и  $e$  — так называемые *параметр* и *эксцентриситет орбиты*. Выбор начала отсчета угла заключается в том, что точка с  $\varphi = 0$  является ближайшей к силовому центру.

Видно, что при  $E < 0$  эксцентриситет  $e < 1$  и орбита является эллипсом (*первый закон Кеплера*). При  $E > 0$  эксцентриситет  $e > 1$  и орбита является гиперболой. Это следует из уравнения (10.13), так как в этом случае положительные радиусы получаются лишь в ограниченном конусе полярных углов  $\cos \varphi \geq -1/e$ .

## 10.5 Параметры эллиптических орбит

Рассмотрим подробнее случай эллиптических орбит. Можно найти параметры эллипса из уравнения (10.13) — большая  $a$  и малая  $b$  полуось эллипса даются следующими выражениями:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (10.14)$$

Но более наглядным образом это можно получить непосредственно из закона сохранения энергии (10.11). Максимальное  $r_2$  и минимальное  $r_1$  удаление тела от силового центра (для орбит Солнечной системы — *афелий* и *перигелий* соответственно) легко найти из (10.11), положив в нем  $dr/dt = 0$ . Имеем квадратное уравнение для точек нулевой радиальной скорости:

$$r^2 - \frac{\alpha r}{|E|} + \frac{L^2}{2m|E|} = 0.$$

По известной теореме Виета два корня этого уравнения связаны с его коэффициентами двумя равенствами:

$$r_1 + r_2 = \frac{\alpha}{|E|}, \quad r_1 r_2 = \frac{L^2}{2m|E|}.$$

Из рисунка (10.7) и определения эллипса:



.....  
«**Эллипс** — это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек — фокусов есть величина постоянная»  
.....

почти очевидны выражения для размеров полуосей эллипса:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b^2 = \frac{(r_1 + r_2)^2}{4} - \frac{(r_1 - r_2)^2}{4} = r_1 r_2 = \frac{L^2}{2m|E|}. \tag{10.15}$$

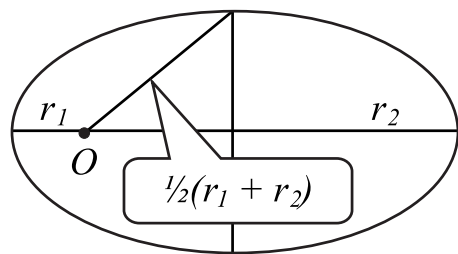


Рис. 10.7 – Параметры эллипса

Время обращения по эллиптической орбите, то есть период движения  $T$ , удобно определить из второго закона Кеплера (10.10). Интегрируя это равенство по времени и принимая площадь эллипса  $S_{el} = \pi ab$ , получим

$$T = \frac{2mS}{L} = \frac{2m\pi ab}{L} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}. \tag{10.16}$$

Период обращения тела  $T$  вокруг неподвижного силового центра зависит только от величины большой полуоси его орбиты  $a$ . Последняя, в свою очередь, зависит только от полной энергии  $E$  частицы.

Для планет и небесных тел Солнечной системы одна из масс в (10.16), а именно масса Солнца  $M_S$ , на много порядков превышает массу второго тела. Поэтому выражение (10.16) может быть переписано в виде:

$$\frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{const}.$$

Отсюда следует известная формулировка *третьего закона Кеплера*:



.....  
Для всех планет Солнечной системы отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси орбиты есть величина постоянная.  
.....

## 10.6 Алгоритм расчета траектории небесного тела

Если для некоторого небесного тела (ниже его масса обозначена как  $m$ ) мы знаем начальные параметры: расстояние от Солнца  $r_0$ , скорость  $v_0$  и момент импульса  $L = mv_0 l_0$  (при известной скорости  $v_0$  достаточно знать прицельный параметр  $l_0$  относительно Солнца), то мы сможем определить полную энергию:

$$E = m \left( \frac{v_0^2}{2} - G \frac{M_S}{r_0} \right). \tag{10.17}$$

- а) Если она будет отрицательной, то орбита тела эллиптическая. По формулам (10.15) найдем полуоси орбиты, величину перигелия и афелия. По формуле (10.16) найдем период обращения.
- б) Если полная энергия (10.17) окажется положительной, то по формулам (10.13) мы сможем определить расстояние максимального сближения  $r_{\min}$  тела с Солнцем:

$$r_{\min} = \frac{\sigma r_0}{1 + \sqrt{1 + 2\sigma \left( \frac{r_0 v_0^2}{2GM_S} - 1 \right)}}, \quad \sigma = \frac{\left( \frac{L}{m} \right)^2}{GM_S r_0}. \tag{10.18}$$

Именно таким способом вычисляют параметры орбиты вновь открытых комет.



.....  
**Контрольные вопросы по главе 10**  
.....

- 1) Чем отличаются понятия инертной и гравитационной массы?
- 2) Почему в центре кольца сила притяжения пробной частицы равна нулю, а в центре сплошного диска она имеет конечную величину?
- 3) Как будет меняться ускорение свободного падения по мере погружения в глубокую шахту?
- 4) Если сделать космическую станцию в виде большой полый не вращающейся сферы, то как будут вести себя предметы внутри этой станции?
- 5) Космический корабль находится на сравнительно большом расстоянии  $R$  от центра Солнца. При какой минимальной скорости движения он сможет покинуть Солнечную систему?
- 6) Вокруг Земли по круговой орбите летит спутник. Как изменится его орбита и период обращения, если скорость спутника быстро увеличить на 20%? Быстро уменьшить на 20%? Быстро увеличить в 2 раза?

---

## Глава 11

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

---

### 11.1 Малые колебания

После того, как мы изучили законы движения и свойства некоторых сил, перейдем к рассмотрению важного класса движения — колебательного процесса. Начнем с простейшего типа колебаний — одномерных *гармонических колебаний*, которое совершает материальная точка при малых отклонениях от своего положения равновесия.

В точке равновесия  $x_0$  потенциальная энергия материальной точки минимальна  $U_0$ , и если отклонение ее от этого положения равновесия невелико, то потенциальная энергия  $U(x)$  произвольной системы вблизи своего минимума всегда может быть представлена в виде квадратичной функции смещения тела, как показано на рис. 11.1:

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad (11.1)$$

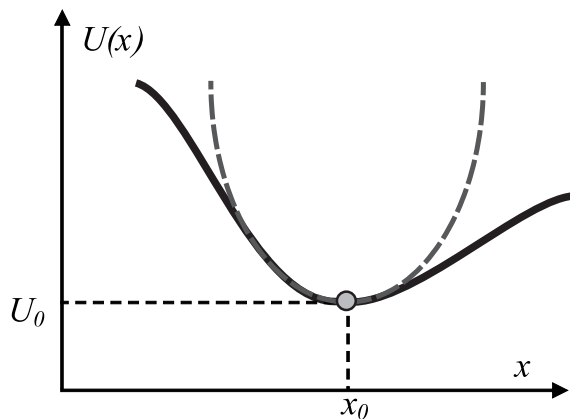


Рис. 11.1 – Аппроксимация потенциальной функции в окрестности минимума квадратичной параболой



Поместим начало новой системы координат в точку равновесия, отсчет потенциальной энергии начнем с  $U_0$ . Тогда сила, действующая на частицу, будет пропорциональна величине отклонения от положения равновесия и всегда направлена к точке равновесия:

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx. \tag{11.2}$$

Уравнение движения материальной точки примет простой вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{11.3}$$

Решением этого уравнения является гармоническая функция

$$x(t) = C \cdot \sin(\omega t + \varphi), \tag{11.4}$$

где  $\omega$  — называется *собственной частотой* свободных колебаний, а постоянные интегрирования  $C$  и  $\varphi$  находятся из начальных условий задачи. Величину  $C$  называют *амплитудой* колебания, это максимальное смещение системы от положения равновесия. А постоянную  $\varphi$  называют *начальной фазой* колебания.

Иногда решение уравнения (11.3) удобно записать по-другому:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \tag{11.5}$$

что эквивалентно решению (11.4), если в нем положить

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}. \tag{11.6}$$

Отметим, что уравнение (11.3) описывает малые колебания около положения равновесия самых различных систем, а не только груз на пружине или маятник.



.....  
Коэффициент пропорциональности между ускорением материальной точки и ее смещением от положения равновесия представляет собой «минус квадрат частоты свободных колебаний».  
.....



.....  
Частота колебания  $\omega$  иногда называется *угловой частотой* колебания в отличие от **циклической частоты**  $f$ , которая указывает количество полных колебаний в единицу времени.  
.....

Эти величины связаны друг с другом и периодом колебаний  $T$  простыми соотношениями:

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega T = 2\pi. \tag{11.7}$$

Циклическую частоту  $f$  указывают в Герцах: частота  $f$  в  $N$  Гц соответствует  $N$  колебаниям в секунду, а период таких колебаний равен  $T = 1/N$  секунды.

## 11.2 Энергия колебательного движения

Если нет трения, то полная энергия колебаний  $E$  около положения равновесия остается постоянной. Она только периодически переходит из одной формы в другую. Для гармонического колебаний груза, заданного функцией вида (11.4), имеем:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}C^2(m\omega^2 \cos^2 \omega t + k \sin^2 \omega t) = \frac{1}{2}kC^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2. \quad (11.8)$$

В положении равновесия максимальна кинетическая энергия (потенциальная в этот момент по определению равна нулю, то есть минимальна). В крайнем положении (амплитудном отклонении) полная энергия является целиком потенциальной, так как скорость обращается в нуль.

Из (11.8) следует общая закономерность гармонических колебаний — полная энергия колебательной системы пропорциональна квадрату амплитуды, а если колеблющаяся масса и амплитуды фиксированы, то полная энергия пропорциональна также квадрату частоты колебания.

Поскольку энергия системы сохраняется, то полностью свободные колебания, раз начавшись, должны продолжаться вечно. Колебания реальных макроскопических систем за счет действия диссипативных сил со временем затухают.

## 11.3 Сложение одномерных колебаний. Биения

Колебательная система может одновременно участвовать в нескольких колебательных движениях, в том числе и с разными частотами. Колебания могут происходить как вдоль одной линии, так и в пространстве нескольких измерений. Рассмотрим сначала результат сложения одномерных колебательных движений.

Если два слагаемых колебательных движения имеют одинаковую частоту, но сдвинуты по фазе относительно друг друга, то суммарное колебание будет иметь ту же частоту, а амплитуда  $A$  станет определяться как амплитудами слагаемых колебаний, так и разностью их фаз  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= a \sin \omega t + b \sin (\omega t + \varphi) = A \sin (\omega t + \Phi), \\ A &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}, \quad \cos \Phi = \frac{a + b \cos \varphi}{A}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Интереснее случай двух колебаний с различными частотами. Если эти частоты несоизмеримы (то есть их отношение не выражается никаким рациональным числом), то результирующее колебание уже вообще не будет периодическим!

Рассмотрим подробнее два одинаковых гармонических колебания с близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то есть такими, что  $\omega_1 + \omega_2 \gg |\omega_1 - \omega_2|$ . Тогда суммарное смещение является произведением двух гармонических функций:

$$x(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t = 2a \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \quad (11.10)$$

причем один множитель меняется со временем очень быстро, а второй сравнительно медленно. Поэтому медленно меняющийся множитель можно рассматривать как переменную амплитуду:

$$A(t) = 2a \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t. \tag{11.11}$$



.....  
*Такие высокочастотные колебания с медленно меняющейся амплитудой называются **биениями**.*  
.....

Их проявление легко наблюдать при настройке музыкальных инструментов, когда две струны имеют очень близкие собственные частоты. Громкость звука при одновременном возбуждении двух таких струн заметно меняется с периодом порядка секунды.

Важный частный случай — это сложение двух (или более) колебаний, частоты которых соизмеримы, то есть находятся в отношении целых чисел  $\omega_1/\omega_2 = m/n$ . В этом случае результирующее колебание тоже будет периодическим. Именно на таких колебаниях построена музыкальная гамма, так как именно периодические звуковые колебания вызывают у человека субъективное чувство гармоничного звучания.



.....  
*Расстроенный музыкальный инструмент, в котором складываются колебания с различными несоизмеримыми частотами, генерирует непериодические колебания. Такие звуки называют **диссонансами**.*  
.....

## 11.4 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим движение материальной точки, совершающей колебания одновременно вдоль двух направлений  $Ox$  и  $Oy$  с одинаковыми частотами:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \omega t, \\ y(t) &= b \cos (\omega t + \varphi) = b (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi). \end{aligned}$$

Из этих соотношений можно исключить время  $t$  и в результате элементарных преобразований получить уравнение траектории материальной точки:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \tag{11.12}$$

Это уравнение эллипса (см. рис. 11.2), который трансформирует свою форму в зависимости от разности фаз колебаний  $\varphi$ . При  $\varphi = 0$  или при  $\varphi = \pm \pi$  эллипс вырождается в прямую линию.

Если  $\pi > \varphi > 0$ , то эллипс описывается точкой, движущейся в направлении по часовой стрелке, при других  $\varphi$  направление движения точки по эллипсу меняется на противоположное.

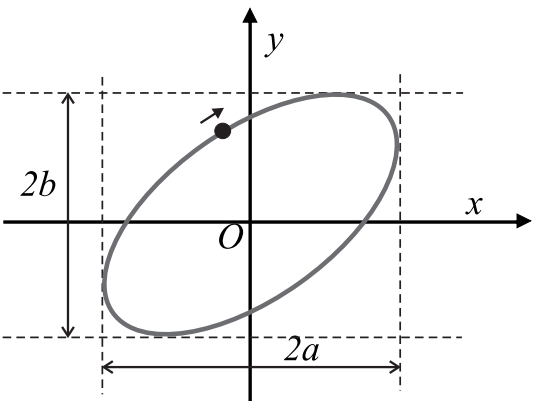


Рис. 11.2 – Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с равными частотами

Если бы частоты колебаний вдоль оси  $x$  и  $y$  были бы чуть различными, то разность фаз непрерывно менялась бы и траектория уже не была бы эллипсом в строгом смысле слова, а описывалась бы эллипсом, медленно трансформирующим свою форму.



.....  
*Если частоты двух колебаний существенно различаются, то точка начинает описывать, вообще говоря, незамкнутую кривую. Они становятся замкнутыми, если частоты соизмеримы, то есть их отношение равно рациональной дроби. Такие, иногда весьма причудливые, кривые называются **фигурами Лиссажу**.*  
.....

Некоторые примеры фигур показаны на рис. 11.3.

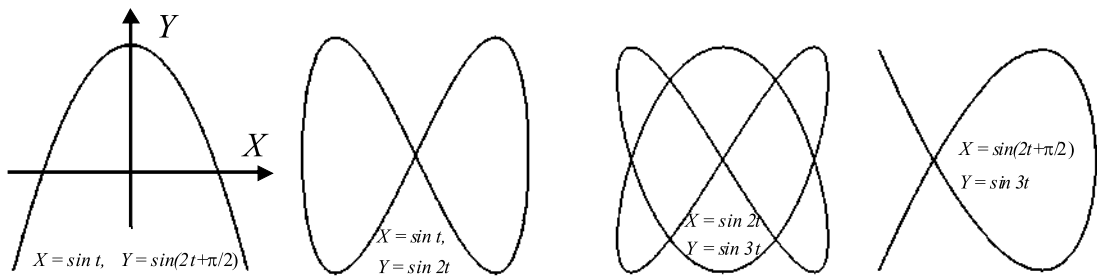


Рис. 11.3 – Примеры фигур Лиссажу и их уравнения в параметрическом виде

### 11.5 Колебания связанных маятников

Посмотрим теперь, что происходит, если складываются не независимые колебательные движения, а когда одна система в процессе своего движения взаимодействует с другой колебательной системой.

Рассмотрим систему двух одинаковых маятников массой  $m$ , каждый из которых может колебаться около своего положения равновесия с собственной частотой

$\omega_0$  (если бы он не взаимодействовал с другим маятником). Кроме того, между этими маятниками имеется упругая связь, например пружинка с жесткостью  $k$ , не растянутая при вертикальном положении обоих маятников. Эта система показана на рис. 11.4. Отклонения 1-го и 2-го маятников от их положения равновесия обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  соответственно.

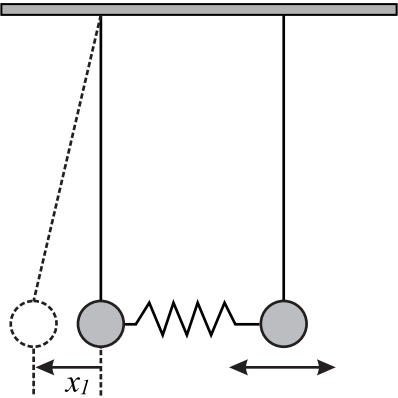


Рис. 11.4 – Система маятников с упругой связью

Запишем систему связанных уравнений, описывающих колебания маятников:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -m \omega_0^2 x_1 + k (x_2 - x_1),$$
$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m \omega_0^2 x_2 + k (x_1 - x_2).$$

После деления на массу и введения обозначения  $\omega_1^2 = k/m$  получим систему, описывающую связанные колебания:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega_0^2 x_1 + \omega_1^2 (x_2 - x_1) = -(\omega_0^2 + \omega_1^2) x_1 + \omega_1^2 x_2,$$
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega_0^2 x_2 + \omega_1^2 (x_1 - x_2) = -(\omega_0^2 + \omega_1^2) x_2 + \omega_1^2 x_1.$$

(11.13)

Из новых уравнений ясно видно, что при фиксированном положении одного из маятников (например, при  $x_1 = \text{const}$ ) второй будет колебаться с измененной частотой  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$ .



.....  
Этот пример демонстрирует общий принцип — введение дополнительной упругой связи (упругая пружинка) в имеющуюся колебательную систему (одиночный маятник) увеличивает частоту собственных колебаний.  
.....

Для того чтобы определить характер движения связанных маятников, сложим сначала два уравнения (11.13), а затем вычтем второе из первого. В результате получим два новых уравнения для комбинаций координат:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} &= -\omega_0^2 (x_1 + x_2), \\ \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} &= -(\omega_0^2 + 2\omega_1^2) (x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{11.14}$$

Если ввести новые переменные  $q_1 = x_1 + x_2$  и  $q_2 = x_1 - x_2$ , то видно, что они должны меняться по гармоническому закону, причем каждая со своей частотой. Получим в общем случае решение с 4-мя произвольными константами, которые определяются начальными условиями задачи (обычно — это две начальные координаты  $x_{10}, x_{20}$  и две начальные скорости  $v_{10}, v_{20}$  маятников):

$$\begin{aligned} q_1(t) &= x_1 + x_2 = C_1 \cos \Omega_1 t + C_2 \sin \Omega_1 t, & \Omega_1 &= \omega_0, \\ q_2(t) &= x_1 - x_2 = C_3 \cos \Omega_2 t + C_4 \sin \Omega_2 t, & \Omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Но, с другой стороны, можно обратно выразить искомые смещения маятников через новые переменные.

$$x_1(t) = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad x_2(t) = \frac{q_1 - q_2}{2}. \tag{11.16}$$

Из (11.16) и (11.15) видно, что колебание каждого связанного маятника можно представить как сложение двух колебаний с различными частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Если связь между маятниками сравнительно слабая, (в данном примере это означает, что  $\omega_1 \ll \omega_0$ ), то имеем  $\Omega_1 \cong \Omega_2$ . В этом случае результат сложения дает уже известные нам *биения*: колебания каждого маятника модулированы по амплитуде с разностной частотой  $\Omega_1 - \Omega_2$ . Но поскольку суммарная энергия всей системы сохраняется во времени, то максимальная амплитуда одного маятника наблюдается тогда, когда амплитуда колебаний второго маятника минимальна. Со временем энергия медленно передается от одного маятника к другому, отношение амплитуд становится обратным, а затем процесс повторяется.



.....  
**Контрольные вопросы по главе 11**  
.....

- 1) Почему, по-вашему, гармонические колебания довольно часто (по сравнению с другими колебательными движениями) встречаются в природных и технических системах?
- 2) Какова размерность угловой частоты?
- 3) Период колебаний маятника пружинных часов равен 0.3 сек. Чему равна угловая частота маятника?
- 4) Амплитуду колебаний груза увеличили в полтора раза. Во сколько раз изменилась максимальная кинетическая энергия маятника?
- 5) Можно ли при сложении двух периодических колебаний получить непериодическое колебательное движение?

- 6) Чему равна угловая частота движения секундной стрелки часов?
- 7) При каких условиях происходят биения в колебательных системах?
- 8) При каких общих условиях фигура Лиссажу имеет вид «восьмерки»?
- 9) При каких условиях фигура Лиссажу будет изображаться незамкнутой линией?
- 10) Два одинаковых маятника связаны пружинкой, как показано на рис. 11.4. У такой системы имеется две частоты собственных колебаний  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (11.15). Опишите характер движения грузов при колебаниях с частотой  $\Omega_2$ .

---

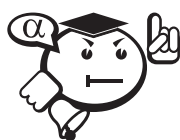
# Глава 12

## ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

---

### 12.1 Скорость света и постулат Эйнштейна

К началу 20 века основы механики, заложенные работами Галилея и Ньютона еще в 17 веке, были основательно поколеблены развитием физики электромагнитного поля. Мы не будем пока говорить об этой области физики подробно, а констатируем один из главных выводов этой науки:



.....  
Скорость распространения света, который представляет собой поток электромагнитных волн, не зависит от скорости движения системы отсчета.  
.....

Этот вывод следовал как из теории электромагнитного поля Максвелла, в которой скорость света представляет просто константу  $c$ , так и прямо подтверждался во всех экспериментах.

По аналогии с упругими звуковыми волнами предполагалось, что электромагнитные волны также являются своего рода упругими волнами, движущимися в особой среде — эфире, и многие исследования были направлены на выяснение других влияний эфира, которые он должен был бы оказывать на движущиеся относительно него тела.

Но воздействия эфира никак себя не проявляли. Более того, большое количество экспериментов по измерению скорости света (наиболее известный из них — эксперимент Майкельсона-Морли, в котором сравнивались скорости световых сигналов, распространяющихся во взаимно-перпендикулярных направлениях) показало, что скорость света вообще не меняется при изменении скорости движения системы отсчета относительно гелиоцентрической системы. Менялись схемы экспериментов, повышалась их точность, но результат оставался прежним.



Для объяснения отрицательного результата эксперимента Майкельсона-Морли голландский физик Генрик Лоренц предположил, что эфир оказывает давление на все движущиеся в нем предметы (в том числе и измерительные приборы), которое заставляет сокращаться их линейные размеры вдоль направления движения. При этом это действие должно быть независимым от механических свойств веществ (модуля Юнга, в частности) и конструкции предметов, что никак не согласовывалось с имеющимися физическими представлениями. Эфир каждый раз «оказывал такое воздействие» на измерительные приборы, что результат измерения скорости света всякий раз давал одну и ту же величину.



.....  
*Сейчас принято такое точное значение скорости света:*

$$c = 299792458 \text{ м/с.} \tag{12.1}$$

.....  
Французский математик Анри Пуанкаре предложил считать постоянство скорости света новым физическим законом (постулатом), делая для скорости света некое исключение по сравнению со скоростями обычных материальных точек. Следствием этого постулата Пуанкаре являются вполне определенные преобразования координат и времени, которые уже были к моменту высказывания Пуанкаре предложены Лоренцем и позволяли согласовать все известные на тот момент факты. Эта явная искусственность в формулировке нового закона исключительно для одного объекта — электромагнитных волн — не вполне удовлетворяла физиков, так как ничто не гарантировало в дальнейшем от появления новых фактов, противоречащих такой «теории без объективного фундамента».

Прорыв в понимании природы был сделан Эйнштейном, который так переформулировал постулат Пуанкаре, что он приобрел фундаментальный смысл объективного закона природы, а не плода лишь нашего ума:

- 1) Эйнштейн сформулировал принцип инвариантности всех (не только механических или электромагнитных, а вообще всех, даже не открытых еще пока) законов природы в любых инерциальных системах отсчета.
- 2) Этот принцип был дополнен утверждением о наличии в природе *фундаментальной скорости* — максимальной скорости передачи взаимодействия. Свет (электромагнитные волны) является одним из частных примеров передачи фундаментального взаимодействия.

Следствием принципа инвариантности всех инерциальных систем отсчета является постоянство фундаментальной скорости (скорости света) во всех инерциальных системах отсчета. Если бы скорость света менялась при переходе от одной системы отсчета к другой, то электромагнитные явления в таких системах протекали бы по-разному (скорость света входит в качестве константы в уравнения поля). Эксперимент же убедительно свидетельствует об инвариантности уравнений Максвелла, а значит, и об инвариантности инерциальных систем отсчета.



.....  
Другими словами, постоянство скорости света — это одно из проявлений более общей закономерности: инвариантности инерциальных систем отсчета по отношению к величине фундаментальной скорости.  
.....

Преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, предложенные Лоренцем, получаются как следствия такого равноправия всех инерциальных систем и постоянства скорости света.

### 12.2 Преобразования Лоренца

Рассмотрим две системы отсчета, показанные на рис. 12.1, причем система  $K'$  движется равномерно со скоростью  $V$  относительно системы  $K$  вдоль оси  $Ox$ . (направление координатной оси  $Ox$  специально выбрано вдоль вектора скорости движения второй системы отсчета!). Кроме пространственных координат, мы должны теперь приписать каждой системе отсчета и свое время, так как преобразованиями только пространственных переменных нельзя описать постоянную величину скорости электромагнитных волн.

Из соображений однородности пространства и времени (отсутствие выделенных начал отсчета координат и времени) неизбежно следует, что преобразования координат и времени при переходе от одной системы к другой должны быть линейными. Координата  $x$ , например, должна линейно зависеть от  $x', y', z'$  и  $t'$ . Линейность преобразований, кроме того, гарантирует нам свободу в выборе единиц измерения координат и времени.

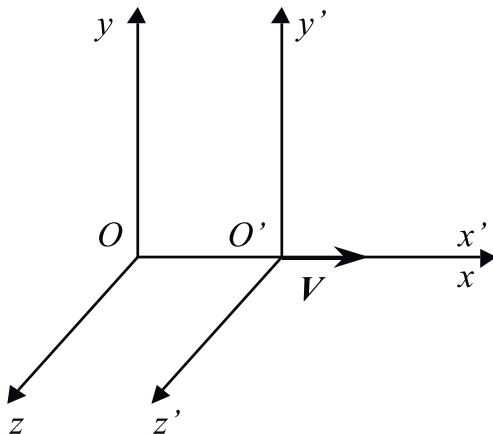


Рис. 12.1 – Две инерциальные системы отсчета

Поскольку плоскости  $y = 0$  и  $y' = 0$  совпадают в обеих системах отсчета, то эти координаты должны обращаться в нуль одновременно. В силу эквивалентности систем отсчета и выбора одинакового направления осей, получим для поперечных движению координат

$$y = y', \quad z = z'. \tag{12.2}$$

Из этих формул вытекает, что  $y$  и  $z$  не зависят от  $x'$  и  $t'$ , значит, и  $x'$  и  $t'$  не должны зависеть от  $y$  и  $z$ . Поэтому, в силу равноправности систем, и  $x$ , и  $t$  не зависят от  $y'$  и  $z'$ .

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что одновременно должны обращаться в нуль координата  $x$  и выражение  $x' + Vt'$ , так как они соответствуют одной и той же точке — началу координат  $K$ -системы (точка  $O$ ) в разных системах отсчета. Отсюда имеем в силу линейности преобразования:

$$x = \gamma (x' + Vt'), \quad (12.3)$$

где  $\gamma$  — постоянная величина, зависящая возможно только от  $V$ .

В силу равноправности систем отсчета, аналогичным соотношением должны быть связаны координаты начала отсчета  $K'$ -системы (точка  $O'$ ) в двух системах:

$$x' = \gamma (x - Vt). \quad (12.4)$$

Здесь постоянная  $\gamma$  та же, что и в (12.3), опять-таки в силу равноправия систем.

Теперь воспользуемся постоянством скорости света  $c$  в обеих системах. Начнем отсчет времени в обеих системах с того момента, когда начала координат  $O$  и  $O'$  совпадают. Пусть в этот момент  $t = t' = 0$  и в направлении оси  $Ox$  посылается световой сигнал (событие 1), который поглощается (событие 2) через некоторое время в точке с координатами  $x$  или  $x'$ :

$$x = ct, \quad x' = ct'. \quad (12.5)$$

Четыре уравнения (12.3)–(12.5) для четырех переменных  $(x, x', t, t')$  одновременно могут быть выполнены только, если

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (12.6)$$

Подставляя (12.6) в (12.3) и (12.4), получим искомые преобразования координат:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (12.7)$$

Чтобы найти формулы преобразования времени, можно из (12.7) исключить  $x$  и выразить время  $t$  через  $x'$  и  $t'$  или исключить  $x'$  и выразить  $t'$  через  $x$  и  $t$ :

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (12.8)$$

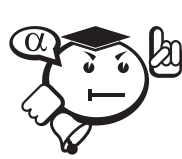
Формулы (12.2), (12.7) и (12.8) называются *преобразованиями Лоренца*. В них «перемешаны» координаты и время. В этом и проявляется тесная взаимосвязь пространства и времени. Более того, координата и время становятся полностью равноправными, если «время измерять в метрах», то есть в качестве временной координаты брать произведение  $\vartheta = ct$ . Тогда преобразования Лоренца для координаты  $x$  и времени  $\vartheta$  будут выглядеть совершенно одинаково:

$$x = \frac{x' + \beta\vartheta'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta' + \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (12.9)$$

где введено обозначение  $\beta = V/c$ . В силу этой симметрии преобразований пространственных координат и времени в современной науке используется единое понятие *пространства-времени*.

Если устремить скорость света  $c$  в бесконечность, то преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Таким образом, различие в течение времени в разных системах обусловлено конечностью скорости света. Этот факт имеет важнейшее философское значение, и мы к нему еще вернемся.

Теперь *принцип относительности Эйнштейна* можно переформулировать в математической форме:



.....

Все законы природы должны описываться уравнениями, которые остаются инвариантными относительно преобразований Лоренца.

.....

Прежде чем перейти к инвариантным формулировкам законов, познакомимся с некоторыми кинематическими следствиями новых преобразований, которые подчас кажутся очень парадоксальными.

### 12.3 Следствия преобразований Лоренца

#### 12.3.1 Относительность одновременности

Два события  $(x'_1, t')$  и  $(x'_2, t')$ , происходящие в разных точках пространства и одновременные в одной системе отсчета (здесь это  $K'$ -система), происходят не одновременно в системе отсчета (здесь это  $K$ -система), движущейся относительно первой:

$$t_1 - t_2 = \frac{(x'_1 - x'_2) V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

(12.10)

Так, поглощение световых сигналов, испущенных к равноудаленным приемникам, произойдет одновременно в той системе, где источник и приемники покоятся

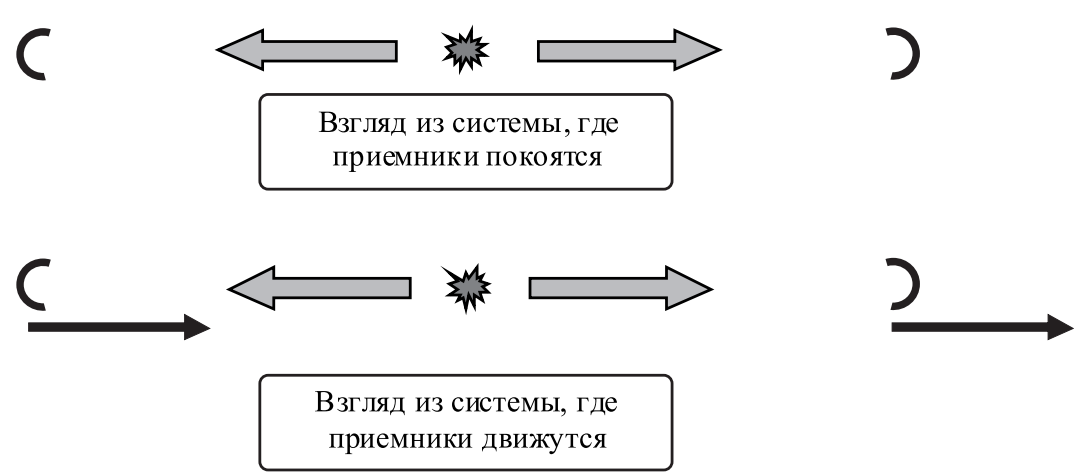


Рис. 12.2 – Относительность одновременности в разных системах отсчета

(система  $K'$ ). Но эти же два события (поглощение квантов в приемниках), с точки зрения наблюдателя, относительно которых движется система  $K'$ , будут происходить не одновременно (рисунок 12.2).

В том приемнике, который «убегает» от света, поглощение должно произойти позже, чем в том приемнике, который «набегает» на световой импульс. Ведь скорость света одинакова (!), а правый приемник в момент приема сигнала будет находиться от точки испускания светового импульса дальше, чем левый.

Очевидно, что в одних системах два таких события могут происходить в одной последовательности, а в других (движущимся им навстречу) системах — в обратной. Одновременность двух событий оказывается понятием относительным. В силу фундаментального *принципа причинности*, утверждающего, что причина не может опережать следствие, мы должны принять, что события с относительной одновременностью не могут быть причинно-зависимыми! Таким образом, теория относительности позволяет четко определить, могут ли два события, разнесенные в пространстве, быть причинно-зависимыми или нет.



.....  
Два события, которые происходят одновременно в различных точках пространства, хотя бы в одной системе отсчета, не могут быть причинно-связанными.  
.....

12.3.2 Относительность длин отрезков

Сравним длину твердого стержня в различных инерциальных системах отсчета. Пусть стержень покоится в системе  $K'$ . Тогда его длина есть просто разность координат его концов:

$$l_0 = x'_2 - x'_1.$$

Для того чтобы измерить длину этого же стержня в системе  $K$ , относительно которой стержень движется, необходимо одновременно (то есть при  $t_2 = t_1$ ) измерить его координаты в этой системе и вычислить их разность, воспользовавшись формулами (12.7) и (12.8):

$$l = x_2 - x_1 = \frac{(x'_2 - x'_1) + (t'_2 - t'_1) V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{x_2 - x_1}{1 - V^2/c^2} \cdot \frac{V^2}{c^2}.$$

Отсюда нетрудно найти

$$l = x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - V^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{12.11}$$

С точки зрения  $K$ -наблюдателя движущийся стержень должен быть короче, чем этот же покоящийся стержень (относительно  $K'$ -наблюдателя). Это и есть *лоренцевское сокращение* продольных размеров движущихся тел, первоначально интерпретируемое Лоренцем как механическое действие эфира. Поперечные размеры тел в силу преобразований (12.2) никак не изменяются.

Интересно, что сокращение формы быстро движущихся реальных протяженных предметов при их «фотографировании» не будет таким буквальным, так как

свет от разных точек предмета в глаз, расположенный в одной точке, придет не одновременно (напомним, что при расчете лоренцевского сокращения мы фиксировали координаты концов отрезка одновременно в разных точках). Наблюдатель как бы «заглядывает в спину» летящему мимо него протяженному объекту.

12.3.3 Относительность промежутков времени между событиями

Пусть в системе  $K'$  в одной и той же точке (!) с координатой  $x'$  происходят два события в моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ . В  $K'$ -системе эти события разделены интервалом  $\Delta t = t'_2 - t'_1$ . Определим интервал времени между этими же событиями с точки зрения  $K$ -наблюдателя. Для него эти события произошли через время, которое опять-таки можно рассчитать с помощью формул (12.7) и (12.8):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{12.12}$$

Отсюда видно, что  $K$ -наблюдатель видит последовательность событий, происходящих в  $K'$ -системе, через больший интервал времени. Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется *собственным временем* этого тела и обозначается буквой  $\tau$ .

Выражение (12.12) можно переписать и наоборот:

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{12.13}$$

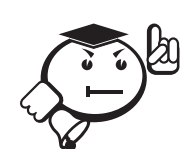


.....

Интервал собственного времени между какими-либо событиями, происходящими в одной точке какой-либо системы отсчета, всегда оказывается меньше интервала времени, отсчитанного между этими же событиями любыми движущимися часами.

.....

В этом состоит знаменитый *парадокс близнецов*: если первый брат-близнец долго летал с околосветовыми скоростями, то по возвращении на Землю его часы покажут меньшее время, чем часы второго брата-близнеца, остававшегося все время на Земле.



.....

Казалось бы, здесь есть противоречие, так как движение относительно и можно считать второго брата путешественником относительно первого. Но симметрии здесь никакой нет. Если отвлечься от специальной теории относительности и принять во внимание ускоренное движение, то асимметрия часов проявится в том, что заново сверить часы можно только после возвращения летавшего брата, и именно он должен испытывать ускорения при возвращении на Землю. То есть только он может сказать, что был в полете. И этого никак не может сказать брат, остававшийся все время на Земле.

.....



## Пример

Чтобы проверить формулу (12.13), в 1971 году был проведен специальный эксперимент с атомными часами. Одни часы находились на борту самолета, летавшего в течение нескольких часов, а контрольные часы оставались на земле. Отставание часов-путешественников составило около 200 нс, что с точностью эксперимента ( $\pm 20$  нс) совпало с предсказанием теории.

Другим экспериментальным доказательством замедления времени служат эксперименты по наблюдению распада элементарных частиц — мюонов. Их собственное время жизни  $T$  составляет около 2 мкс. И тем не менее быстрые мезоны успевают пройти в пространстве от момента рождения до момента своего распада несколько километров, что значительно превышает «расчетный путь»  $cT \cong 600$  метров. Гипотетический «наблюдатель», движущийся вместе с мюоном, воспринял бы пройденное расстояние в своей системе отсчета в соответствии с формулой (12.11), как раз равное  $\cong 600$  м!

Довольно часто (как правило, в среде не специалистов по физике) затеваются дискуссии о том, что все подобные расчеты касаются только физического времени, но не биологического (времени старения живых организмов). Это в корне неверная точка зрения: если бы это было так, то, сравнив одно время (биологическое) с другим (физическим), можно было бы выявить абсолютное движение инерциальной системы отсчета (так как в покоящейся системе эти интервалы времени по определению должны быть одинаковыми). Это-то как раз и противоречит постулату об эквивалентности всех инерциальных систем.

## 12.4 Сложение скоростей

Определим с помощью формул преобразования Лоренца закон сложения скоростей. Пусть в движущейся  $K'$ -системе скорость имеет компоненты

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} : \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Тогда из преобразований координат (12.2), (12.7) и (12.8) получим для компоненты скорости  $v_x$ , параллельной скорости относительного движения систем отсчета:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + (V/c^2) dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (12.14)$$

Также получим для «поперечных» компонент скорости  $v_y$  и  $v_z$ :

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (12.15)$$

Обратные преобразования из  $K$ -системы в  $K'$ -систему получаются из этих же формул простой сменой знака у символа  $V$ .

Если скорость частицы в  $K'$ -системе равна скорости света  $v'_x = c$ , то ее скорость в  $K$ -системе также будет равна скорости света. Именно для этого результата — постоянства скорости света — и были выведены преобразования Лоренца.

При малых значениях  $V \ll c$  формулы (12.14) и (12.15) дают привычный нам закон сложения скоростей:

$$v \approx v' + V,$$

который теперь должен рассматриваться как приближенный.

## 12.5 Абберрация света

Рассмотрим отклонение светового луча при переходе от неподвижной к движущейся системе отсчета наблюдателя. Это явление называется *абберацией света*. Оно имеет место и в галилеевой механике (на рисунке 12.3 векторы  $c$  и  $c'$  обозначают «классическую» скорость света в разных системах отсчета).

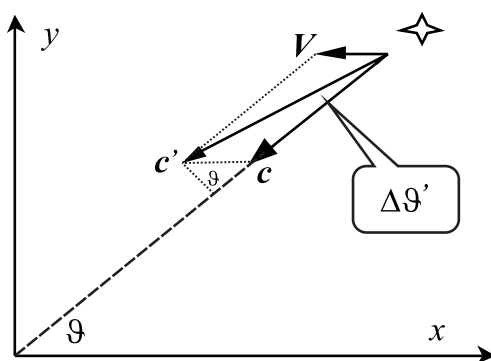


Рис. 12.3 – Абберрация света — отклонение луча при наблюдении его из движущейся системы отсчета

Если смотреть на звезду из неподвижной  $K$ -системы отсчета под углом  $\vartheta$ , то при наблюдении этой же звезды из движущейся со скоростью  $V$   $K'$ -системы отсчета угол наблюдения будет меньше на величину

$$\Delta\vartheta' \approx \frac{V}{c} \sin \vartheta. \quad (12.16)$$

Релятивистская же формула, которая получается из преобразования (12.14) при подстановке в него  $v'_x = -c \cos \vartheta'$  и  $v_x = -c \cos \vartheta$ , имеет вид

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta'}. \quad (12.17)$$

При  $V \ll c$  формула (12.17) переходит в нерелятивистское выражение (12.16). Например, при  $\vartheta = \pi/2$  имеем  $\cos \vartheta' = V/c$ . Чем больше скорость наблюдателя, тем под более острым углом впереди по курсу движения наблюдателя видна звезда.



Если бы космический корабль двигался в пространстве с околосветовой скоростью, то пилот видел бы концентрацию звезд прямо по курсу и разрежение звездного неба позади. Вселенная для движущегося наблюдателя как бы стягивается вперед.

Интересно, что таким образом пилот мог бы сделать вывод о скорости движения относительно звезд Вселенной. Эту скорость можно было бы считать «абсолютной». Конечно, это не противоречит постулату о невозможности определения абсолютного равномерного движения, так как в наши рассуждения неявно введен постулат о равномерности Вселенной. Кроме того, скорость «относительно Вселенной» можно было бы определить и по смещению спектра звезд за счет эффекта Доплера.



Контрольные вопросы по главе 12

- 1) Какие наблюдаемые факты заставили пересмотреть наши представления о пространстве и времени?
- 2) Может ли меняться последовательность во времени двух событий при смене системы отсчета наблюдателя?
- 3) Может ли меняться последовательность двух причинно-связанных событий при смене системы отсчета наблюдателя?
- 4) Каким основным свойством обладает интервал собственного времени между двумя причинно-связанными событиями по сравнению с интервалом между этими же событиями, который фиксирует движущийся наблюдатель?
- 5) Две частицы в лабораторной установке разлетаются в противоположных направлениях со скоростью в  $0.8c$ . С какой скоростью растет расстояние между этими частицами в лабораторной системе отсчета? С какой скоростью одна частица удаляется от другой в системе отсчета, привязанной к одной из этих частиц?

---

# Глава 13

## РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

---

### 13.1 Релятивистский импульс<sup>1</sup>

Выше мы показали, что скорость света является предельной для любых частиц. Теперь можно перейти к выяснению динамического механизма, обеспечивающего предельность этой скорости. Найдем релятивистское выражение для импульса и энергии. Отправной точкой будем считать законы сохранения этих величин, а не закон Ньютона<sup>2</sup>.

Релятивистский закон сложения скоростей (12.14)–(12.15) приводит к выводу, что суммарный импульс системы материальных точек, определенный ранее как  $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$ , не сохраняется в разных инерциальных системах отсчета!



.....  
*Эйнштейн показал, что инвариантен и сохраняется импульс материальной точки, определенный через собственное время  $\tau$ , которое является инвариантным для всех систем:*

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{13.1}$$

*где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  — скорость частицы по часам той системы, в которой измеряется импульс. Это и есть релятивистское выражение для импульса материальной точки.*  
.....

---

<sup>1</sup>Релятивистскими (от английского слова *relativity* — относительность) называют явления, законы и формулы специальной теории относительности, то есть относящиеся к частицам, движущимся со скоростями, сравнимыми со скоростью света  $c$ .

<sup>2</sup>Закон Ньютона, как будет видно ниже, не очень удобно использовать при релятивистских скоростях, так как масса тела и сила теряют свои «удобные свойства»: масса перестает быть постоянной и аддитивной величиной, а сила перестает быть вектором, в традиционном понимании. Кроме того, при движении частиц с околосветовыми скоростями необходимо принимать в расчет конечное время передачи взаимодействия между телами, поэтому 3-й закон Ньютона перестает выполняться.

Это выражение можно по-прежнему рассматривать как произведение массы на скорость, но при этом масса как бы сама зависит от скорости. Теперь становится понятным динамический механизм предельной скорости: при приближении к скорости света эффективная масса частицы начинает возрастать, и постоянная сила обеспечивает все меньшее и меньшее ускорение, так что скорость света становится энергетически недостижимой (работа внешней силы должна быть бесконечной).

Можно показать, что ускорение тела при скоростях, близких к скорости света, зависит не только от величины силы, но и ее направления: если сила действует ортогонально вектору скорости, то поперечное ускорение будет больше, чем в случае действия этой же силы вдоль направления скорости. Вот почему при расчетах движения частиц с релятивистскими скоростями обычно не используется понятие силы. Оно становится просто неудобным, так как потеряло ряд полезных свойств, которые имело в динамике Ньютона, — инвариантность в разных системах отсчета и независимость ускорения от направления действия силы. Другими словами, сила перестает быть векторной величиной в обычном понимании этого определения.

## 13.2 Энергия релятивистских частиц

Тем не менее форма закона Ньютона для скорости изменения импульса материальной точки остается прежней:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F}.$$

Этот закон поможет нам получить релятивистское выражение для энергии материальной точки  $E$ , если вспомнить, что  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  представляет скорость увеличения кинетической энергии частицы:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + v^2 \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Здесь учтено, что  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = v dv$ . Получаем выражение для энергии материальной точки с точностью до константы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \text{const.} \quad (13.2)$$

Постоянную интегрирования можно было бы выбрать по-разному, но Эйнштейн на основании анализа законов сохранения показал, что они становятся инвариантными, если положить эту постоянную нулю. Тогда классическое приближение (при  $v \ll c$ ) для энергии получим из (13.2) в виде:

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

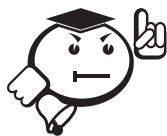
в котором второе слагаемое дает обычную кинетическую энергию, а первое представляет очень большую по сравнению со вторым слагаемым постоянную величину.

Для классической физики введение постоянной составляющей энергии не влечет каких-либо трудностей, так как означает лишь смещение начала отсчета энергии. Но Эйнштейн пошел дальше и интерпретировал эту постоянную как реальную внутреннюю энергию, содержащуюся в покоящейся частице. Она получила название *энергии покоя массивной частицы*:

$$E_0 = mc^2. \tag{13.3}$$

Как будет показано ниже, сложное покоящееся в целом тело, то есть состоящее из множества взаимодействующих частиц, имеет массу  $M$ , которая складывается не только из масс отдельных частиц  $m$ , но и из суммы всех энергий движения и взаимодействия этих частиц, измеренной в системе центра инерции тела.

Ценность такого подхода оправдывается, так как энергия покоя может быть «извлечена» и передана другим частицам. То есть энергия покоя такая же полноценная энергия, как и все остальные. Вот почему в релятивистской теории всегда используется понятие полной (а не только кинетической) энергии, даваемой выражением (13.2).



.....  
Отметим, что понятие потенциальной энергии взаимодействия частиц друг с другом в релятивистском пределе вообще должно быть пересмотрено, так как оно предполагает мгновенное распространение взаимодействий в пространстве.  
.....

Из сопоставления (13.1) и (13.2) можно получить связь между энергией и импульсом материальной точки:

$$p = \frac{E}{c} \cdot \frac{v}{c}. \tag{13.4}$$

Можно исключить из (13.1) и (13.4) скорость  $v$  и получить еще одно важное соотношение между энергией и импульсом материальной точки:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2. \tag{13.5}$$

### 13.3 Закон сохранения полной энергии

Посмотрим, как проявляет себя закон сохранения импульса и энергии при столкновении релятивистских частиц. Рассмотрим две одинаковые частицы массы  $m$ , движущиеся навстречу друг другу со скоростью  $u$  и испытывающие абсолютно неупругое лобовое столкновение. В системе центра масс их импульсы до столкновения равны по модулю  $mu/\sqrt{1 - u^2/c^2}$  и противоположны по направлению, так что полный импульс системы равен нулю. Суммарная полная энергия частиц при этом равна  $2mc^2/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ .

Рассмотрим это же столкновение в новой системе отсчета, в которой центр инерции системы движется с малой нерелятивистской скоростью  $V \ll u$ , как показано на рис. 13.1.

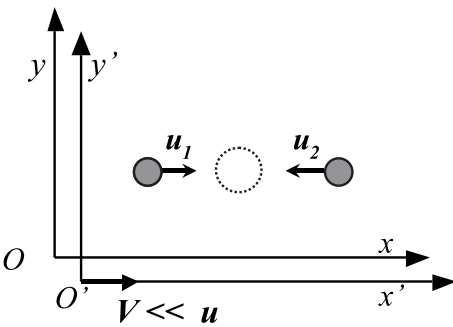


Рис. 13.1 – Лобовое неупругое столкновение в разных системах отсчета

Тогда получим для импульса первой частицы  $p_1 \approx m(u - V) / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ , а импульса второй  $p_2 \approx -m(u + V) / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Суммарный импульс двух частиц окажется равным сумме этих величин:  $p = p_1 + p_2 \approx -2mV / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ .

Но теперь эта вновь образовавшаяся составная частица имеет в лабораторной системе отсчета нерелятивистскую скорость  $V$ , так что для нее должна быть верной классическая формула для импульса материальной точки  $\mathbf{p} = M\mathbf{V}$ . В соответствии с законом сохранения импульса мы должны считать, что образовавшаяся в результате столкновения частица должна иметь массу  $M$ , значительно превышающую суммарную массу покоя первоначальных частиц. А именно она должна быть такой, какая вытекает из закона сохранения энергии:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = Mc^2 \rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Оказывается, что в релятивистской теории из закона сохранения импульса с необходимостью вытекает закон сохранения энергии. В классической механике эти законы не имеют такой прямой связи, и их рассматривают отдельно. Например, при неупругом столкновении тел мы ранее говорили (раздел 5.4), что суммарная кинетическая энергия не сохраняется и ее часть переходит во внутреннюю энергию теплового движения молекул.



.....  
В релятивистской динамике нет необходимости делать исключения из закона сохранения энергии для неупругого столкновения: полная энергия сталкивающихся тел всегда сохраняется!  
.....

Та часть кинетической энергии, которая переходит в энергию движения молекул, по-прежнему дает вклад в полную энергию системы тел за счет изменения их массы покоя. Теперь видно, что именно выражение для полной энергии (13.2), а не отдельно кинетическая и энергия покоя, имеет физический смысл.

Но это в корне меняет физический смысл понятия массы. Ведь масса — это мера инертности тела. И ее введение в механику было удобным именно потому, что масса обладала свойством сохранения и аддитивности. В релятивистской механике масса не обладает ни одним из этих свойств. Эти свойства остались только у полной энергии. Фактически понятие массы в релятивистской механике полно-

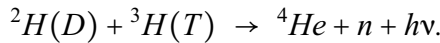
стью поглощено понятием энергии. И это действительно так! Сохраняется только энергия, но не масса в прежнем ее понимании.

Если какая-либо частица массы  $M$  под действием внутренних причин распадается на несколько других, причем эти осколки быстро разлетаются, то суммарная масса покоя осколков  $\sum m_i$  всегда меньше массы покоя первоначальной частицы  $M$ . Этот факт получил название *дефекта массы*. А разница энергий покоя равняется суммарной кинетической энергии  $E_{kin}$  осколков и энергии фотонов:

$$E_{kin} = (M - \sum m_i) c^2 = -E_{con}. \quad (13.6)$$

Именно эта энергия выделяется при ядерных реакциях распада. Обычно она составляет около 0.5% от энергии покоя делящегося ядра. В ядерных реакциях распада тяжелых ядер образуются более устойчивые ядра, принадлежащие элементам из середины таблицы Менделеева. При распаде ядра избыток энергии уносится как кинетическая энергия осколков деления.

Если же составная частица имеет массу покоя, меньшую суммарной массы ее составных частей, то нам необходимо будет затратить энергию  $E_{con}$  при ее делении на части. В этом случае энергия дефекта масс (13.6) носит название *энергии связи*. При образовании более устойчивой частицы из других частиц энергия связи выделяется. Именно это явление имеет место в реакциях ядерного синтеза, когда при слиянии ядер изотопов водорода — дейтерия  $D$  и трития  $T$  — образуются ядра гелия. Выделившуюся при слиянии энергию связи уносят нейтроны  $n$  и кванты электромагнитного излучения  $h\nu$ :



Для реакции термоядерного синтеза энергия связи примерно равна 1% от энергии покоя атомных ядер.

В отличие от ядерных реакции между *элементарными частицами* идут при энергиях связи, сравнимых с энергией покоя участвующих в реакциях частиц. И хотя при столкновении двух энергичных элементарных частиц обычно образуется большое количество новых частиц, нельзя говорить, что эти новые частицы являются составными частями сталкивающихся. В этом случае происходит буквальное преобразование энергии движения в массу покоя новых частиц.

## 13.4 Неупругое столкновение двух релятивистских частиц

Пусть атомное ядро, имеющее массу покоя  $m_1$  и летящее со скоростью  $u$ , сталкивается с другим неподвижным ядром массой покоя  $m_2$ . В результате абсолютно неупругого столкновения образуется новое атомное ядро. Найдем, пользуясь законами сохранения полной энергии импульса, массу покоя  $M$  вновь образованного ядра и скорость  $V$  нового ядра.

Найдем сначала суммарный импульс  $p$  налетающей частицы:

$$p = \frac{m_1 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Этот же импульс будет иметь новое ядро, так как импульс покоящегося ядра равен нулю.

Найдем теперь суммарную полную энергию  $E$  обоих ядер до столкновения, учитывая, что покоящееся ядро обладает только энергией покоя:

$$E = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + m_2 c^2.$$

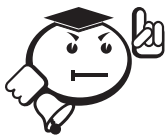
В силу закона сохранения энергии именно этой энергией будет обладать новое ядро.

Пользуясь соотношением (13.5) между импульсом  $p$  и энергией  $E$  релятивистской частицы, определим сначала массу покоя  $M$  нового ядра:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(m_1 + m_2 \sqrt{1 - u^2/c^2}\right)^2 - (m_1 u/c)^2}{1 - u^2/c^2}} = \\ &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (13.1) для импульса частицы, определим скорость ее движения:

$$p = \frac{MV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \rightarrow V = \frac{p}{\sqrt{M^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}} = \frac{u}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$



.....

Отметим, что формула (13.2), устанавливающая эквивалентность массы и энергии, формально допускает существование частиц с нулевой массой покоя. Эти частицы — носители полевого взаимодействия — всегда распространяются со скоростью света.

Они в соответствии с формулой (13.4) обладают также импульсом  $p = E/c$ . Это означает, что кроме энергетического воздействия при поглощении в веществе фотоны сообщают телу также некоторый импульс. Таким образом, падающее электромагнитное излучение оказывает на тела давление. Это давление квантов света — *фотонов* было впервые экспериментально измерено в конце 19 века российским физиком П. Н. Лебедевым.

.....

### 13.5 Четырехмерное пространство-время

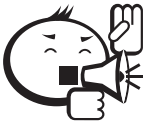
Ранее уже отмечалось, что время и координаты при переходе из одной инерциальной системы отсчета к другой преобразуются довольно симметричным образом (формулы преобразования Лоренца (12.9)). Формально можно рассматривать совокупность трех пространственных координат и момента времени события как некоторые четыре координаты радиус-вектора, характеризующего это событие, в четырехмерном пространстве-времени  $(ct, x, y, z)$ . Для полной симметрии всех четырех

новых координат «время надо измерять в метрах», то есть в *ct*. Иногда для упрощения формул полагают  $c = 1$ , после чего время и расстояния в таких формулах имеют одинаковую размерность.



.....  
*Любое событие в 4-мерном пространстве-времени изображается точкой и характеризуется тремя числами-координатами и числом-временем. Эта точка называется **мировой точкой**.*  
 .....

Любая частица в пространстве-времени изображается некоторой кривой, которая называется *мировой линией*. Заметим, что не только движущаяся частица изображается линией-траекторией, а вообще любая частица обязательно описывает в пространстве-времени некоторую траекторию. Так, даже если какая-то частица покоится в обычной системе отсчета, то временная координата все равно меняется, так как время нельзя остановить. Это очень важное различие между движением в обычном трехмерном пространстве и движением частиц в пространстве-времени.



.....  
 В пространстве-времени каждой частице сопоставляется не отдельная точка, а непрерывная линия!  
 .....

Еще в самом начале нашего курса (раздел 1.6) мы отметили, что в трехмерном пространстве есть такие величины, которые преобразуются при смене системы координат по тем же формулам, что и сами координаты. Эти величины мы называли векторами. Хотя проекции векторов меняются при смене системы координат, вектор как объект сохраняет свои свойства. Можно сказать, что вектор реальнее (объективнее) своих компонент — он существует независимо от его координатного представления.

При переходе к 4-мерному пространству-времени мы можем ожидать, что объекты с такими же свойствами, как у обычных векторов, есть и в нем. Будем называть их *4-векторами*. Одним таким 4-вектором можно, конечно, считать радиус-вектор мировой точки с проекциями  $4r(ct, x, y, z)$ . Покажем теперь, что совокупность трех проекций импульса (13.1) и энергии (13.2) может рассматриваться как проекции некоторого 4-вектора *энергии-импульса*.

Посмотрим, как преобразуются компоненты вектора релятивистского импульса и энергия материальной точки при смене системы отсчета. Пусть частица имеет скорость  $u'$  в  $K'$ -системе, а мы наблюдаем ее движение из системы отсчета  $K$ , движущейся навстречу и параллельно скорости частицы со скоростью  $V$  относительно  $K'$ . Тогда скорость тела  $u$  в  $K$ -системе найдем по формуле (12.14):

$$u = \frac{u' + V}{1 + u'V/c^2}.$$

Импульс частицы в  $K$ -системе (точнее, только одну его проекцию) получим после ряда преобразований:



$$\begin{aligned}
 p &= \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = mu \frac{1+u'V/c^2}{\sqrt{(1-u'^2/c^2)(1-V^2/c^2)}} = \\
 &= \left( \frac{mu'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} + \frac{mV}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{p' + (E'/c)(V/c)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.
 \end{aligned} \tag{13.7}$$

Аналогично для энергии частицы в  $K$ -системе получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{c} &= \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \left( \frac{mc}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} + \frac{mu'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \cdot \frac{V}{c} \right) \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \\
 &= \frac{E'/c + p'(V/c)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.
 \end{aligned} \tag{13.8}$$

Если принять в качестве компонент 4-вектора энергии-импульса  ${}_4P(E/c, p_x, p_y, p_z)$ , то нетрудно заметить полную идентичность формул преобразования этих компонент (13.7)–(13.8) с преобразованиями Лоренца (12.9) для 4-радиус-вектора  ${}_4r(\vartheta, x, y, z)$  мировой точки.

Таким образом, энергия и импульс образуют единый объект — 4-вектор энергии-импульса в пространстве-времени. Его можно изображать как стрелку, касательную к мировой линии частицы, как показано на рис. 13.2. Временная проекция этой стрелки дает значение релятивистской энергии (13.2), деленной на  $c$ , а три пространственные проекции — три компоненты релятивистского импульса (13.1).

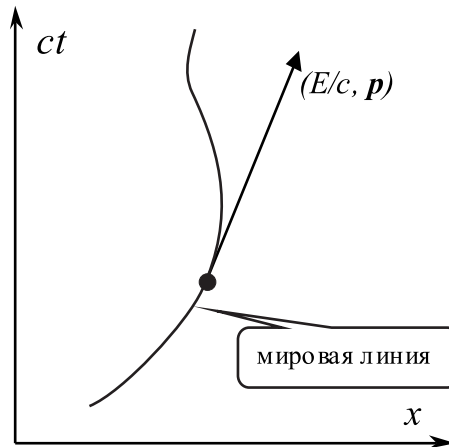


Рис. 13.2 – Мировая линия и 4-вектор энергии-импульса

Сам 4-вектор является более объективным, чем его компоненты в отдельности. Вот почему в теории относительности сохранение импульса системы (трех проекций 4-вектора) автоматически влечет сохранение энергии системы (четвертой проекции этого же 4-вектора).

## 13.6 Скалярное произведение 4-векторов

Чтобы закончить краткое изложение теории 4-векторов, определим скалярное произведение 4-векторов, которое всегда дает инвариантную величину, то есть одинаковую во всех инерциальных системах отсчета.

Определим скалярное произведение двух 4-векторов следующим образом:

$${}_4\mathbf{A} \cdot {}_4\mathbf{B} = A_t B_t - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z). \quad (13.9)$$

Естественно, что инвариантным будет и модуль 4-вектора:

$${}_4A^2 = {}_4\mathbf{A} \cdot {}_4\mathbf{A} = A_t^2 - (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2).$$

Посмотрим, какой же инвариант дает нам квадрат 4-вектора энергии импульса? В системе отсчета, в которой частица покоится, это выражение равняется  $m^2 c^2$ , и, значит, в любой другой инерциальной системе будет иметь место соотношение:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2.$$

Это выражение, записанное несколько в иной форме (13.5), мы уже получали ранее.



.....  
 Другим примером инвариантной величины может служить **интервал** — расстояние между двумя мировыми точками — событиями:  
 .....

$$\begin{aligned} (s_2 - s_1)^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ &= c^2(t_2 - t_1)^2 - |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Интервал между двумя бесконечно близкими событиями, лежащими на мировой линии материальной точки, можно записать и по-другому:

$$ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = c d\tau. \quad (13.11)$$



.....  
 То есть интервал между двумя событиями, лежащими на мировой линии точки, равен собственному времени между этими событиями, умноженному на скорость света.  
 .....

В соответствии с определением интервала (13.10) и постоянством скорости света два события — излучение и поглощение какого-либо фотона — разделены нулевым интервалом. Другими словами, мировые линии всех световых сигналов имеют нулевой интервал! Время для фотона как бы останавливается или не существует, так как между излучением и поглощением лежит нулевой интервал собственного времени.

Пользуясь собственным временем, которое инвариантно в любых системах отсчета, можно ввести 4-скорость  ${}_4V$ :

$${}_4V = \frac{d{}_4\mathbf{r}}{d\tau} = \left\{ \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\}, \quad (13.12)$$

которая имеет инвариантный квадрат модуля  ${}_4V^2 = c^2$ . Такое определение 4-мерной скорости приводит к привычному для нас выражению релятивистского импульса частицы:

$${}_4P = m {}_4V.$$

Несмотря на непривычные для нас свойства пространства и времени, Эйнштейн был настолько глубоко убежден в правильности принципа относительности, что распространил его не только на инерциальные системы отсчета, но и на некоторые неинерциальные. Это привело его к релятивистской теории тяготения — общей теории относительности. Переход к описанию движения частиц и полей на языке 4-векторов позволяет построить элегантную теорию мироздания.

### 13.7 Оптический эффект Доплера

Если у нас есть какой-либо 4-вектор, то его компоненты меняются при смене системы отсчета по формулам Лоренца, аналогичным (12.9).

Интересно, что если мы возьмем 4-вектор энергии-импульса  ${}_4P'(h\nu'/c, -h\nu'/c, 0, 0)$ , соответствующий световому кванту, движущемуся навстречу покоящемуся наблюдателю вдоль оси  $O'x'$ , то из (13.8) мы легко получим закон преобразования его энергии к системе отсчета наблюдателя, движущегося со скоростью  $V$  вдоль оси  $Ox$  по направлению к источнику света:

$$E = h\nu = \frac{E' - cp'(V/c)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = h\nu' \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = h\nu' \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}, \tag{13.13}$$

который описывает так называемый оптический эффект Доплера: изменение частоты периодического ЭМ сигнала при относительном движении приемника и источника сигнала.

Если движутся не только источник света, но и приемник сигнала, как показано на рис. 13.3, то частота принимаемого излучения будет зависеть от обеих скоростей движения.

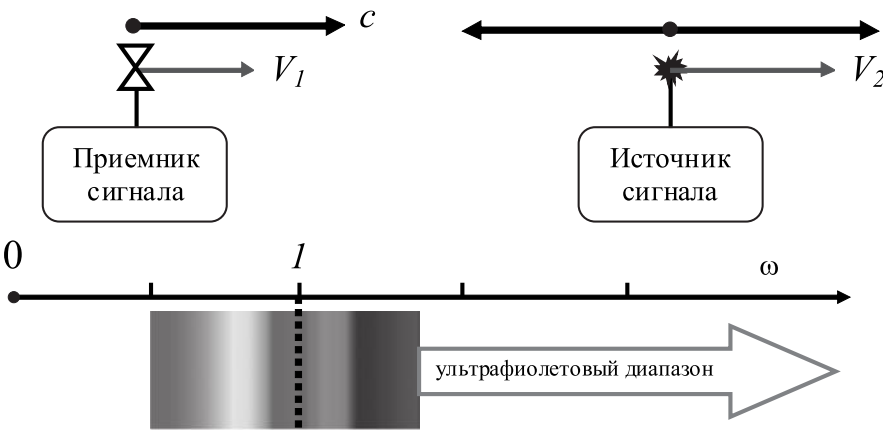


Рис. 13.3 – Оптический эффект Доплера

Пусть, источник света излучает спектральную зеленую линию с частотой  $\nu_0$ , лежащую в середине видимого диапазона электромагнитных волн (на рис. 13.3 она обозначена 1).

Тогда при скорости приемника  $V_1$  и скорости «убегающего» источника  $V_2$  будем в соответствии с законом сложения скоростей (12.14) иметь относительную скорость источника света в системе отсчета приемника:

$$V_O = \frac{V_1 - V_2}{1 - V_1 V_2 / c^2}.$$

(13.14)

Подставляя (13.14) в (13.13), получим значение частоты принимаемого сигнала:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + V_O/c}{1 - V_O/c}} = \nu_0 \sqrt{\frac{(1 + V_1/c)(1 - V_2/c)}{(1 + V_2/c)(1 - V_1/c)}}.$$

(13.15)

Если приемник сближается с источником, то принимаемая частота смещается к синей границе оптического спектра, а если удаляется, то к красной границе. Говорят, что спектральная линия излучения испытывает «красное» или «синее» смещение.

Таким образом, зная «собственную» частоту излучаемого сигнала и сравнивая ее с частотой принимаемого сигнала, можно определить относительную скорость движения источника света.



.....  
В заключение этой главы надо еще раз отметить, что все истинные законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца, а преобразования координат и скоростей Галилея являются лишь приближенными выражениями при медленных движениях тел.  
.....



.....  
**Контрольные вопросы по главе 13**  
.....

- 1) Нарисуйте график зависимости импульса материальной точки от скорости ее движения.
- 2) Нарисуйте график зависимости полной энергии материальной точки от ее импульса.
- 3) Как найти скорость частицы, если заданы ее импульс и полная энергия?
- 4) Чем понятие мировой линии частицы отличается от ее траектории?
- 5) Частица с массой покоя  $m$  движется со скоростью  $V$  к неподвижной частице с массой  $M$ . Чему равна скорость движения центра масс  $V_C$  этой системы двух частиц?

- 6) Будет ли меняться частота принимаемого света, если источник света движется перпендикулярно направлению на приемник?
- 7) Как выглядят в пространстве-времени мировые линии фотонов?
- 8) Почему, по-вашему, в теории относительности невозможно плавное уменьшение энергии фотона в процессе его движения в пустом пространстве?

---

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Механика является базовым разделом всей физики. Такая ситуация сложилась исторически, потому что именно механическое движение доступно непосредственному наблюдению и измерению. В механике впервые были соединены математические построения человеческого разума и природные явления. Первые физические эксперименты (специальные опыты, направленные на проверку гипотез) были проведены Галилеем именно с движущимися телами. Законы Ньютона стали первым успешным обобщением наблюдаемых фактов в виде рациональной математической теории. Практически все дифференциальное и интегральное исчисление было разработано Ньютоном и Лейбницем для того, чтобы можно было точно рассчитывать траектории движения тел в пространстве.

Поэтому от качества усвоения механики зависит уровень понимания всех остальных разделов физических дисциплин. В частности, законы сохранения импульса и энергии полностью переносятся на движение и взаимодействие отдельных атомов и молекул, которые будут являться предметом изучения молекулярной физики. Колебательное движение лежит в основе всех волновых процессов, включая и распространение электромагнитных волн.

Надо отметить, что в разделах пособия даны самые краткие основы механики, без знания которых нельзя решить ни одну физическую задачу. Решение задач является неотъемлемым этапом обучения любой физической дисциплины, поэтому изучение механики, изложенной в данном пособии, должно обязательно сопровождаться практическими занятиями.

---

## ЛИТЕРАТУРА

---

- [1] Савельев И. В. Курс общей физики : в 5 т. / И. В. Савельев. — М. : АСТ : АСТРЕЛЬ, 1998 (2001, 2002, 2004). — Т. 1.
- [2] Савельев И. В. Курс общей физики : в 3 т. / И. В. Савельев. — СПб. : Наука, 1997 (2000, 2001, 2003, 2007). — Т. 1.
- [3] Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. — М. : ИЦ «Академия», 2003.
- [4] Иродов И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. — М. : Физматлит, 2000.
- [5] Фейнмановские лекции по физике. М. : Мир, 1977. — Вып. 1–4.
- [6] Орир Дж. Физика / Дж. Орир. — М. : Мир, 1981. — Т. 1.

**Учебное издание**  
**Козырев Андрей Владимирович**

**МЕХАНИКА**

**Учебное пособие**

**Корректор Осипова Е. А.**  
**Компьютерная верстка Хомич С. Л.**

**Подписано в печать 16.03.12. Формат 60х84/8.**  
**Усл. печ. л. 15,81. Тираж 500 экз. Заказ**

---

**Издано в ООО «Эль Контент»**  
**634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17**  
**Отпечатано в Томском государственном университете**  
**систем управления и радиоэлектроники.**  
**634050, г. Томск, пр. Ленина, 40**  
**Тел. (3822) 533018.**